Marmara Üniversitesi

İ.İ.B.F. Dergisi

YIL 2007, CİLT XXII, SAYI 1

FİNANSAL ZAMAN SERİLERİ İÇİN ORTALAMAYA DÖNME SIÇRAMA DİFÜZYON MODELİ

Doç. Dr. Ömer ÖNALAN*

Özet

Bu çalışmada, finansal menkul kıymet zaman serilerinin getirilerini modellemek için ortalamaya dönme sıçrama difüzyon süreci kullanılmaktadır. Fiyat dalgalanmalarını modellemek için başlangıçta uzun süre Brownian hareket süreci kullanılmıştır. Brownian hareket sürecin en önemli özelliklerinden birisi, sürecin örneklem eğrilerinin sürekli olmasıdır. Bu sürecin bir diğer önemli özelliği de, ölçeğe göre değişmemesidir. Halbuki gerçek hayatta, fiyatlar daima sürekli olmayıp sıçramalara sahiptir. Eğer fiyatların davranışına daha yakından bakılacak olursa, fiyatların farklı ölçeklerde farklı davrandığı görülecektir. Brownian hareket sürecinin artımları normal dağılıma sahiptir. Fakat deneysel çalışmalar birçok finansal zaman serisinin normal dağılım varsayımını sağlamadığını göstermektedir. Bu nedenle, ortalamaya dönme sıçrama difüzyon modeli, finansal zaman serilerinin karakteristiklerini daha gerçekçi bir şekilde yansıtmaktadır.

Anahtar Kelimeler: *Brownian Hareket, Geometrik Brownian Hareket, Sıçramalı Süreçler, Finansal Zaman Serisi, Simülasyon.*

Abstract

In this study, the mean – reverting jump diffusion model is used to model the return of time series of financial securities. In the beginning long time, Brownian motion process used to model price fluctations.The one of the most important properties of Brownian motion is that the sample paths of this process are continuous. Another important properties of this process is that this process is invariant under the scaling. However in reality, the security prices always has no contiuous, it has some jumps. If you look prices from near, you look different behaviors in different scaling. The increments of Brownian motion have normal distribution. But emprical studies shown that normal distribution assumption is not suitable for a lot of financial time series. Fors reasons, these mean-reverting jump diffüzion model represents the charecterizations of financial time series.

***Keywords**: Brownian Motion, Geometric Brownian Motion, Jump Processes, Financial Time Series, Simulation.*

* Marmara Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, İşletme Bölümü, Sayısal Yöntemler Anabilim Dalı.

1. Giriş

Hisse senedi piyasalarında fiyatların genellikle serbest bir şekilde değiştiği gözlenmektedir. Bu değişimde birçok faktör etkili olmaktadır Bu nedenle de fiyatlar çok oynak bir yapıya sahiptir. Fiyatların zamana göre değişimini modellemek için kullanılabilecek en uygun matematiksel araç ise stokastik süreçler teorisidir. Bu süreçler kullanılarak, gelecekte ortaya çıkması muhtemel olaylara olasılık ataması yapılabilir. Finansal süreçlerin modellenmesi ve analizi, uygulamalı matematiğin bir dalı olan matematiksel finansın çok hızlı bir şekilde gelişmesine neden olmuştur. Finans alanındaki zaman serileri uzun süre Gaussian süreçler (Brownian hareket) kullanılarak modellenmiştir. Fakat finansal piyasalardaki gerçek zaman serileri analiz edildiğinde bunların çoğunlukla, sola veya sağa çarpık, ortalama civarında normal dağılıma göre daha sivri ve kalın kuyruklarla karakterize edildiği görülmektedir. Örneğin menkul kıymet piyasalarında, eğer hisse senedi fiyatları bir rastsal yürüyüş süreci izliyorsa, hisse senedinin geçmişteki fiyatlarının bilinmesi geleceğin kestirimi için hiçbir ek enformasyon sağlamaz. Bununla birlikte rastsal yürüyüş süreci fiyatları bağımsız aynı dağılıma sahip rastsal değişkenler olarak ele alır ve fiyatların istatistiksel özelliklerinin anlaşılmasına yardımcı olur. Hisse senedi fiyatları kesikli zamanlı, kesikli değişkenli stokastik süreçler olmalarına rağmen, hisse senedi fiyat dinamiklerini modellemek için sürekli zamanlı sürekli değişkenli modeller uygundur (Hull, J.(2000), s.218).

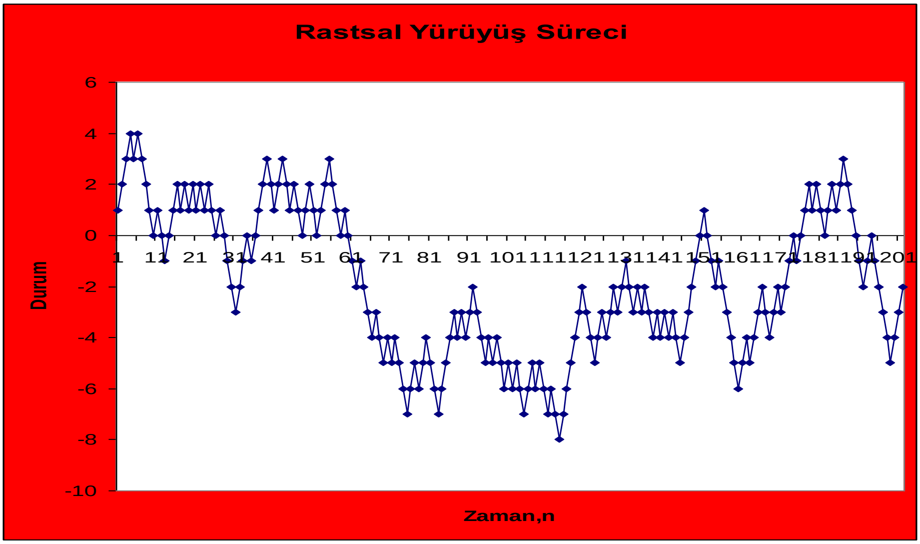
Menkul kıymet piyasaları dışındaki diğer piyasalarda ise fiyatlar, söz konusu malın üretim maliyeti civarında olma eğilimi göstermektedir. Anormal piyasa koşulları altında, kısa vadede fiyat aralıkları oluşmakta ise de uzun vadede fiyatlar kendini düzelterek üretim maliyetine yakınsama eğilimi göstermektedir (Schwartz, E.S (1997), Clewlow, L. ve diğerleri(2001)). Bu düzeltme, ortalamaya dönme süreci olarak adlandırılan bir stokastik süreçle modellenebilir (Etheritge, A.,(2002)). Finansal piyasalardaki yatırım uzmanları arasındaki genel kanaat ise hisse senedi getirilerinin, tarihsel ortalamalarına döneceği şeklindedir. Ortalamaya dönme aslında, uzun vadeli hafıza nın özel bir formudur.

Çalışma aşağıdaki şekilde organize edilmiştir. 2. bölümde, ilgili menkul kıymetin fiyat değişimini modellemek için kullanılabilecek temel stokastik süreçler incelenmiştir. Bunlar Rastsal Yürüyüş süreci, Brownian hareket, Geometrik Brownian hareket ve Ortalamaya Dönme sürecidir. Ayrıca bu bölümde bu süreçlerin parametre takdir işlemleri de açıklanmıştır. 3. bölümde, finansal zaman serilerinin fiyat gelişimini modellemek için Ortalamaya Dönme Sıçrama Difüzyon modeli oluşturulmuştur. Bölümün devamında ise modelin parametrelerinin gerçek verilerden nasıl takdir edileceği konusu açıklanmıştır. 4. bölümde, verilerin analizi yapılmakta, 5. bölümde ise çalışmanın sonucu yer almaktadır.

2. Stokastik Modeller

2.1 Rastsal Yürüyüş Modeli

Menkul kıymet fiyat gelişimi için rastsal yürüyüş modeli, fiyat değişimlerinin bir-birlerinden bağımsız olduğu varsayımına dayanır. Diğer bir ifade ile tarihsel fiyat eğrisi gelecek fiyat ile ilişkisizdir. Yani fiyatlar bir Markov süreci izler. Rastsal yürüyüşten sapma ise fiyat değişimlerinin bir dereceye kadar öngörülebileceğini gösterir



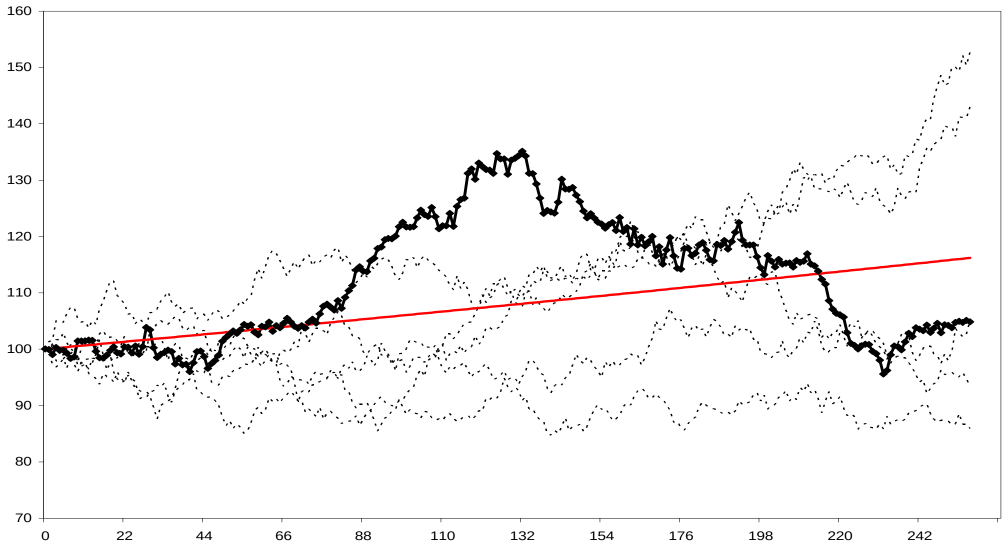
ŞEKİL 1: Rastsal Yürüyüş Süreci

2.2 Brownian Hareket (Difüzyon) Süreci

Mal fiyatlarını modellemek için en çok kullanılan stokastik süreç Brownian hareket sürecidir. Bu süreç rastsal yürüyüş sürecinin limit durumudur. Brownian hareket 1900 yılında L. Bachelier tarafından hisse senedi fiyatları için bir model olarak önerilmiştir. Fakat bu süreç negatif değerleri de alabildiğinden, makul bir model değildir. Standart bir boyutlu Brownian hareket süreci Weiner süreci olarak da adlandırılır. Bir Wiener süreci

$$\Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t} \tag{1}$$

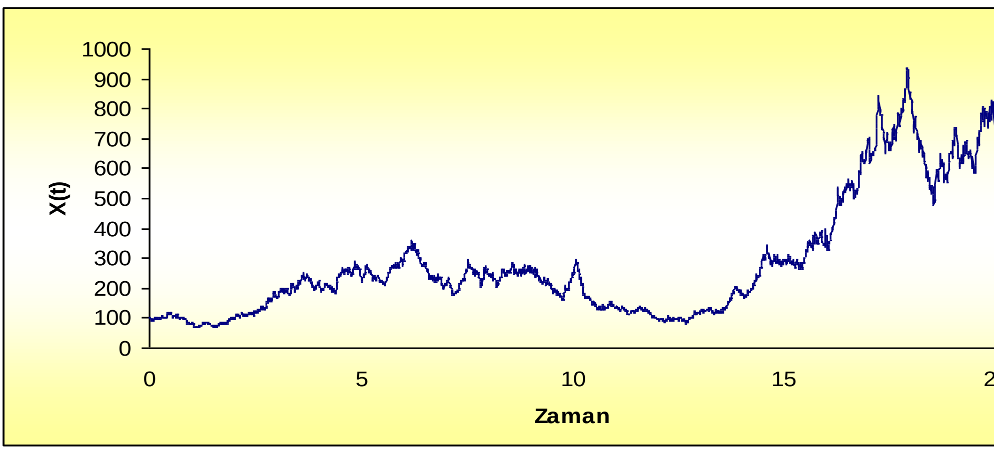
formunda bir süreçtir. Burada ε standart normal dağılımdan çekilmiş bir rastsal değişkendir. Weiner süreci, Markov sürecinin özel bir halidir. Z ise normal dağılımdan çekilmiş bir rastsal değişkendir.



ŞEKİL 2. Brownian Hareketinin Örneklem Eğrileri

2.3 Geometrik Brownian Hareket

Menkul kıymet fiyatlarının Weiner süreci yerine, Brownian hareketin bir versiyonu olan Geometrik Brownian hareket süreci kullanılarak modellenmesi daha makul bir yaklaşımdır. Geometrik Brownian hareket getirilerin Lognormal dağılıma sahip olmasını gerektirir. Bu sayede getirilerin negatif olması önlenmiş olur (Stampfli, J. ve Goodman, V. (2001), Hangi, P. ve Marchessani, F ., (2005)).



ŞEKİL 3: Geometrik Brownian Hareket Süreci

Sürekli zamanda, hisse senedi fiyatlarının değişimi;

$$dS = S[\mu\, dt + \sigma\, dz] \tag{2}$$

Süreci ile modellenebilir. μ ve σ sırası ile hisse senedinin yıllık beklenen getiri oranı ve getirinin oynaklığıdır. Bu modelden de görülebileceği gibi, hisse senedi fiyatındaki değişim, iki bileşenin toplamından oluşmaktadır;

- Sonsuz küçük bir zaman aralığında, hisse senedinin yıllık beklenen getirisi $(\mu\, dt)$
- Sonsuz küçük bir zaman aralığında, hisse senedi getirisinin beklenen oynaklığı $(\sigma\, dz)$

Kesikli zamanda, hisse senedi fiyatlarının değişimi;

Gerçekte hisse senedi fiyat hareketleri sürekli değildir. Çünkü borsalar her akşam kapanır her sabah tekrar açılır. Üstelik fiyatların $\pm$ %10 dan fazla değişmesine borsa tarafından izin verilmez. Geometrik Brownian hareketin kesikli versiyonunu aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$\left(S_{t+\Delta t} - S_t\right) = S_t\left[\mu \Delta t \quad + \sigma\, \varepsilon \sqrt{\Delta t}\right] \tag{3}$$

Bu durumda menkul kıymetin fiyatı aşağıdaki şekilde modellenebilir.

$$S_t = S_0\, e^{\left\{\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right\}\left(t - t_0\right)} \tag{4}$$

S : Menkul kıymetin fiyatı

δ : Malın verimi

$t - t_0$: Bir yıldaki periyot sayısı

Zaman periyotlarının çok küçük olması durumunda, formülü aşağıdaki şekilde tekrar yazabiliriz :

$$S_t = S_0\, e^{\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(t - t_0\right) \; + \; \sigma\left(W_t - W_{t_0}\right)\right\}} \tag{5-a}$$

$$S_{t+\Delta t} = S_t\, e^{\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t \; + \; \sigma\, \varepsilon \sqrt{\Delta t}\right\}} \tag{5-b}$$

Burada, $\{W_t \; ; \quad t \geq 0\}$ standart Brownian hareket süreci, S_0 ise malın başlangıçtaki fiyatıdır. Geometrik Brownian hareket aşağıdaki Lognormal dağılıma sahiptir :

$$P(S,t,S_0,t_0) = \frac{1}{S\sqrt{2\sigma^2\tau}} e^{\left\{ -\frac{\left[Ln\left(\frac{S}{S_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau \right]^2}{2\sigma^2\tau} \right\}} \qquad (6)$$

Burada, τ periyodun uzunluğunu göstermektedir (Shiryaev, A.N. (1999)).

2.3.1 Geometrik Brownian Hareketin Parametrelerinin Takdiri

Hisse senedi fiyatlarının $[0,\tau]$ aralığında kaydedilmiş olduğunu kabul edelim . Bu zaman aralığını, her birinin uzunluğu Δt olan, n eşit aralığa bölelim. Her bir alt aralığın sonunda, hisse senedinin fiyatının bilindiğini varsayalım.

- $r_i = \ln(S_{i+1}) - \ln(S_i)$ Logaritmik getiri serisini oluşturalım.
- $r_1, r_2, \ldots, r_n$ serisi için,
- $\bar{r} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i$
- $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(r_i - \bar{r})^2$ dir.

Bu istatistikler getirinin anakitle ortalaması ve varyansı için teorik olarak aşağıdaki şekilde hesaplanır (Stapfli, J. ve Goodman, V. (2001), s.80) :

$$\text{Ortalama} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t \qquad \text{ve} \qquad \text{Varyans} = \sigma^2 t$$

$$\bar{r} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t \qquad \text{ve} \qquad S^2 = \sigma^2 t$$

Bu denklemler μ ve σ için çözülürse,

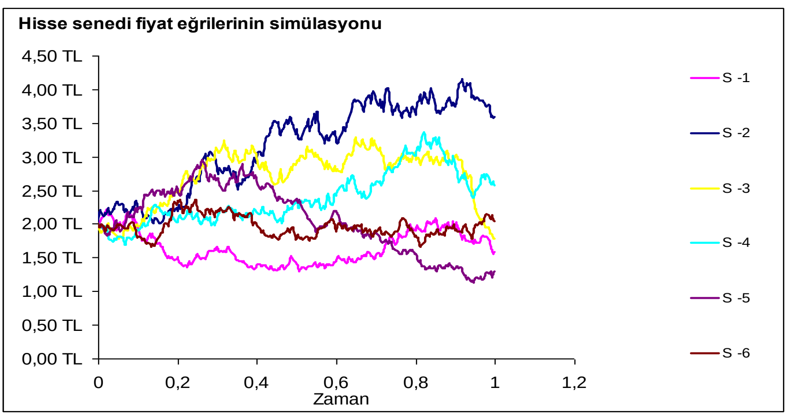
$$\hat{\mu} = \frac{\bar{r} + \frac{S^2}{2}}{\Delta t} \qquad \text{ve} \qquad \hat{\sigma} = \frac{S}{\sqrt{\Delta t}}$$

Eşitlikleri elde edilir. Bir yılda 250 iş günü olduğunu kabul ediyoruz. Bir günde 8 saat olması durumunda $\Delta t = 1/[250 \times 8]$, zaman dakikalarla ölçülüyorsa, $\Delta t = 1/[250 \times 8 \times 60]$ olur. Örneğin,

$$\boxed{\Delta S/S = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}}$$

$t = 0$ zamanındaki hisse senedi fiyatı	2,00 TL
Zaman (T)	1
Beklenen getiri (μ)	20,00%
Oynaklık (σ)	40,00%
Δt	0,0033

Olması durumunda, fiyatlar simüle edilirse aşağıdaki grafik elde edilir:



ŞEKİL 4. Hisse Senedi Fiyatlarının Simülasyonu

2. 4 Ortalamaya Dönme Süreci

Ortalamaya dönme süreci basit bir örnekle kolayca açıklanabilir: Bir kişinin barda oturup sarhoş oluncaya kadar içtiğini ve eve dönüş sırasında da ona tasmasından tutmuş olduğu köpeğinin rehberlik ettiğini hayal edelim. Sarhoş ve köpek arasındaki mesafenin değişimini araştırdığımızı kabul edelim. Sarhoş yolda, bir sağa bir sola sendeleyerek yürüyecektir. Onun bu sendelemelerinin büyüklüğü, köpeğin bağlı olduğu ipin uzunluğuna, köpeğin pozisyonuna ve sarhoşun adımlarının büyüklüğüne bağlı olacaktır. Sarhoş sendeleyerek köpekten uzaklaştığında, köpek tarafından geri çekilecek ve sonunda evinin yolunu izleyecektir.

Ortalamaya dönme süreci matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\underbrace{S_{t+1} - S_t}_{\substack{Fiyat \\ degisimi}} = \underbrace{\alpha\left(S^* - S_t\right)}_{\substack{Ortalamaya \\ dönme}} + \underbrace{\sigma\, \varepsilon_t}_{\substack{Rastsal \\ terim}} \qquad (7)$$

S^* : Dönülen ortalama seviye veya uzun vadeli denge fiyatı

S_t : Spot fiyat

α : Ortalamaya dönme oranı

σ : Oynaklık

ε_t : t ve t+1 zamanları arasında fiyatı etkileyen rastsal şoklar.

Yukarıdaki denklemden de görülebileceği gibi, ortalamaya dönme bileşeni, ortalamaya dönme oranı kadar, dönülen ortalama seviye ve spot fiyat arasındaki fark tarafından da belirlenir. Eğer spot fiyat ortalama seviyenin altında kalıyorsa, ortalamaya dönme bileşeni pozitif, eğer spot fiyat ortalama seviyenin üzerinde ise ortalamaya dönme bileşeni negatif olacaktır. Böylece spot fiyat üzerinde düşme yönünde bir etki yaratacaktır. Fiyat eğrisindeki eğilim, dönülen ortalama seviye, ortalama dönme hızı ise ortalama dönme oranı ile belirlenir.(Ball, C.A. ve Torous ,W.N.(1983), Metron, R.C. (1976), Blanco, C ve Saranow, D.(2001)). (7) denklemi ile verilen modeli , zaman'a göre değişimleri de içerecek şekilde daha genel olarak ifade edebiliriz:

$$d\log S_t = \alpha\left[S^* - \log S_t\right]dt + \sigma\, dW_t \qquad (8)$$

α ' nın büyüyen değerleri, ortalamaya daha hızlı dönüleceğini gösterir. α yıllıklaştırılmış bir orandır. Örneğin $\alpha = 2$ ise bu fiyatların, uzun vadeli ortalama değere altı ayda bir döneceğini gösterir.

2.4.1 Faiz Oranları İçin Ortalamaya Dönme Modelleri:

Bu modeller Vasicek modeli ve CIR (Cox, Ingersol, Ross) modelidir.

Vasicek modeli: $$dr = \alpha\left(R^{*} - r\right)dt + \sigma\, dz \qquad (9)$$

CIR modeli : $$dr = \alpha\left(R^{*} - r\right)dt + \sigma\sqrt{r}\, dz \qquad (10)$$

r : Faiz oranı

dr : Sonsuz küçük dt zaman periyodunda, faiz oranındaki değişim

R^{*} : r' nin ortalama dönülme seviyesi

σ : Faiz oranının oynaklığı

dz : z , stokastik değişkeninin sonsuz küçük değişimi

α : Ortalamaya dönme oranı

Bu modellerin kesikli zamanlı versiyonları :

Vasicek modeli : $$r_t = r_{t-\Delta t} + \alpha\left(R^{*} - r\right)\Delta t + \sigma\,\varepsilon_i\sqrt{\Delta t} \qquad (11)$$

CIR modeli : $$r_t = r_{t-\Delta t} + \alpha\left(R^{*} - r\right)\Delta t + \sigma\sqrt{r_{t-\Delta t}}\;\varepsilon_i\sqrt{\Delta t} \qquad (12)$$

Burada , r_t ve $r_{t-\Delta t}$ sırasıyla r ' nin t ve $\left(t-\Delta t\right)$ zamanlarındaki değerleridir.

ε_i, standart normal dağılımdan elde edilen rastsal değişkeni göstermektedir. ε_i değişkenlerinin değerleri aşagıdaki fonksiyon kullanılarak belirlenir.

$$\varepsilon_i = NORMSINV(RAND(\,)) \qquad (13)$$

Yoğunluğu sıfır olan Geometrik Brownian hareket süreci ise;

$$r_t = r_{t-\Delta t} + \sigma\,\varepsilon_i\sqrt{\Delta t} \qquad (14)$$

Şeklinde yazılabilir. Bu süreç ortalamaya dönen bir süreç değildir.

2.4.2 Ortalamaya Dönme Sürecinin Parametrelerinin Takdiri

Ortalamaya dönme oranı, lineer regresyon kullanılarak kolayca tahmin edilebilir. $x = \log S$ olmak üzere, Ito Lemma kullanılırsa, fiyatların doğal logaritması, aşağıdaki *Ornstein – Uhlenbeck Süreci* ile karakterize edilebilir.

$$dx = \alpha\left(m - x\right)dt + \sigma\, dW \tag{15}$$

$$m = \mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}$$ (Uzun vadeli ortalama)

α : Ortalamaya dönme oranı (hızı)

Kullanılan zaman serisinin parametrelerini tahmin etmek için aşağıdaki regresyon denklemi kullanılır:

$$dx_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 x_t + \varepsilon \tag{16}$$

Burada , $\beta_0 = \alpha\, m\, dt$ ve $\beta_1 = -\alpha\, dt$ dir. Görüldüğü gibi, x değerleri, dx'e karşı regresyona tabi tutulmaktadır. σ oynaklığı, regresyonun standart hatası ile tahmin edilir. Bir ortalamaya dönme sürecinde oynaklık, fiyatlar üzerinde sınırlı bir etkiye sahiptir. Bir rastsal şoktan sonra, fiyatlar tekrar uzun vadeli ortalamaya geri dönerler. Yani fiyatların uzun vadeli değişkenliği zaman ile orantılı olarak büyümez.

3. Ortalamaya Dönme Sıçrama Difüzyon Süreci

Ortalamaya dönme sürecini açıklarken, köpeğinin kendisine rehberlik ettiği bir sarhoşun bardan eve giderken izlediği yolu modellemek için rastsal yürüyüş sürecini kullanmıştık. Sarhoşun sendeleyerek yürümesinin yönü ve büyüklüğü genelde rastsaldır. Yani bir rastsal yürüyüş süreci izler. Sarhoşun sendelemelerinin büyüklüğü, köpeğin ipinin uzunluğu ile sınırlıdır. Sarhoş sendeleyerek köpekten uzaklaştığında, ip sonuna kadar gerilecek ve sarhoş köpeğe doğru geri çekilecektir (Blanco, C. ve Saranow, D.(2001)). Şimdi de, aniden yoldan bir arabanın geçtiğini ve köpeğin arabanın peşinden koştuğunu düşünelim. Bunun sonucunda, sarhoş aniden hızlı bir şekilde araba yönünde çekilecektir. Araba uzaklaştığında ise köpek tekrar ev yönünde hareket edecek ve sarhoş normal pozisyonuna geri dönecektir. Bu durumu difüzyon bileşenine bir de sıçrama bileşeni ekleyerek modelleyebiliriz.

$$\underbrace{S_{t+1} - S_t}_{\substack{\text{Fiyat}\\ \text{degisimi}}} = \underbrace{\alpha\left(S^* - S_t\right)\Delta t}_{\substack{\text{Ortalamaya}\\ \text{dönme}\\ \text{terimi}}} + \underbrace{S_t\,\sigma\,\varepsilon_t\sqrt{\Delta t}}_{\substack{\text{Diffüzyon}\\ \text{terimi}}} + \underbrace{\ln J\,\Delta q_t}_{\substack{\text{Sıçrama}\\ \text{terimi}}}$$

(17)

S_t : Spot fiyat

S^* : Dönülen ortalama seviye

α : Ortalama seviyeye dönme hızı

σ : Oynaklık

J : Rastsal sıçrama büyüklüğü

Δq : Poisson süreci

$$\Delta q_t = \begin{cases} 1 \quad , \quad \lambda \Delta t \quad ihtimalle \\ 0 \quad , \quad 1-\lambda \Delta t \quad ihtimalle \end{cases} \tag{18}$$

Burada, λ sıçrama sürecinin *yoğunluğu* veya *sıklığı* olarak adlandırılmaktadır. Sıçrama büyüklüğü J için aşağıdaki varsayımları kabul ediyoruz :

- J lognormal dağılmıştır. Yani , $\ln J \sim N\left(\mu_j, \sigma_j^2\right)$
- Sıçramalarla ortaya çıkan risk sistematik değildir.

Bu nedenle de çeşitlendirme yapılarak yok edilemez. Üstelik, $E[J]=1$, olduğunu kabul ederek, üstlenilen risk için fazladan bir ödülün olmadığını da garanti etmiş oluruz. Bu varsayımlar altında, J ' nin özelliklerini aşağıdaki şekilde özetleyebiliriz:

- $J = e^{\phi} \qquad , \quad \phi \sim N\left(-\dfrac{\sigma_J^2}{2}, \sigma_J^2\right)$
- $E[J]=1$
- $E[\ln J] = -\dfrac{\sigma_J^2}{2}$
- $Var[\ln J] = \sigma_J^2$

S_t yi ifade eden stokastik diferansiyel denklem aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$dS_t = \alpha\left(S^* - \ln S_t\right)S_t dt + \sigma S_t \, dW_t + S_{t\_} \left(J-1\right) dq_t \tag{19}$$

$dq_t = 0$ olduğunda, ortalamaya dönme difüzyon süreci elde edilir. Rastsal zamanlarda, S_t önceki değer $S_{t\_}$ yeni değer $JS_{t\_}$ ye sıçrayacaktır. $S_{t\_}\left(J-1\right)$ terimi, sıçramadan önceki ve sonraki değişimi verecektir. Yani , $\Delta S_t = JS_{t\_} - S_{t\_}$ olur. Modelin kesikli zamanlı versiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t} = \alpha\left(S^* - \ln S_t\right)\Delta t + \sigma\,\varepsilon_i\,\sqrt{\Delta t} + \Delta S_t\,\Delta q_t \qquad (20)$$

3.1 Parametrelerin Tahmini

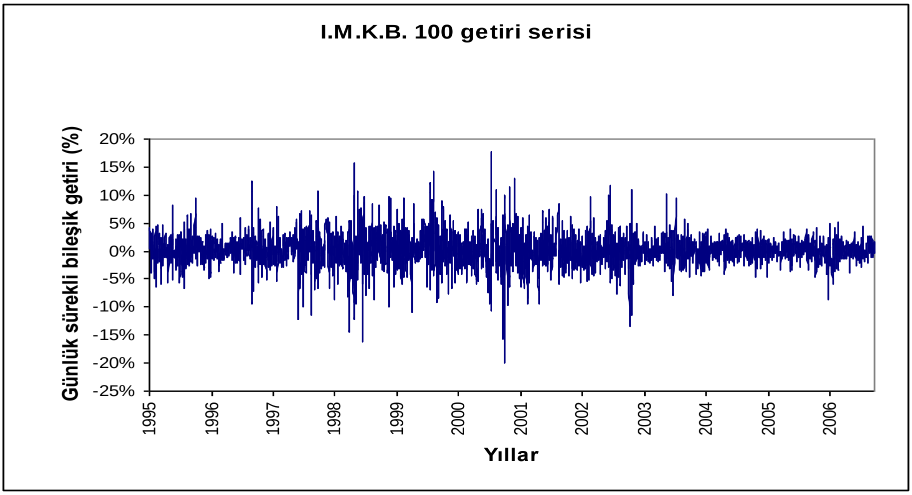
Oynaklık (σ): Oynaklığın zamanla sabit olması durumunda, genellikle tarihsel hareketli oynaklık, bir tahmin olarak kullanılabilir. Örneğin, aylık periyotlarla hesaplanan hareketli tarihsel oynaklıkların ortalaması yıllık oynaklık olarak kullanılabilir.

Ortalamaya dönme oranı (α): Ortalamaya dönme oranı, bir lineer regresyon kullanılarak tahmin edilir. Bu durumda x_t logaritmik fiyatlar serisine karşılık Δx_t getirileri regresyona tabi tutulur.

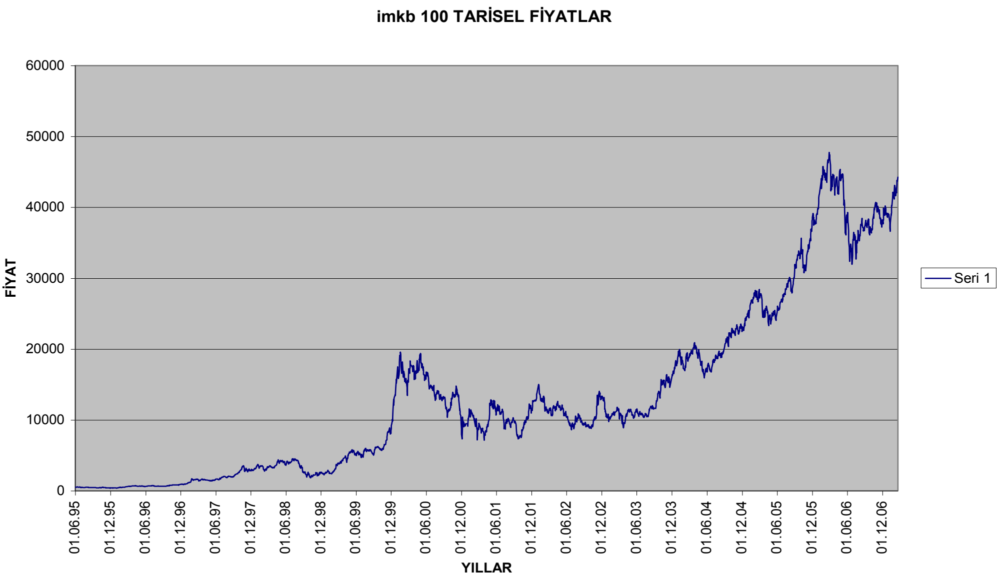
Sıçrama Parametresi (J): Sıçrama bileşeninin parametrelerini tahmin etmek için önce getiri serileri süzülür. Sonra bu verileri kullanarak, sıçramaların standart sapması σ_J ve sıçramaların sıklığı (yoğunluğu) λ tahmin edilir. λ , yıl içerisindeki sıçramaların toplam sayısı, gözlem sayısına bölünerek hesaplanır. Bu değer bize sıçramaların, ortalama olarak ne kadar sıklıkta olduğunu söyler. Sıçrama oynaklığı olarak da bilinen sıçramaların standart sapması, sıçrama büyüklüklerini tanımlayan olasılık dağılımının standart sapmasını gösteren bir sayıdır. Veri miktarına bağlı olarak, 3 standart sapmanın ötesindeki olayları *Sıçrama olayları* olarak düşünebiliriz. Modelin parametrelerinin geçmiş verilere dayanarak tahmin edilmesindeki zayıflık, tarihsel kayıtların gelecek sıçramalar hakkındaki beklentileri içermemesinden kaynaklanmaktadır (Cartea, A. ve Figueroa, M.G. (2005)).

4. Verilerin Analizi

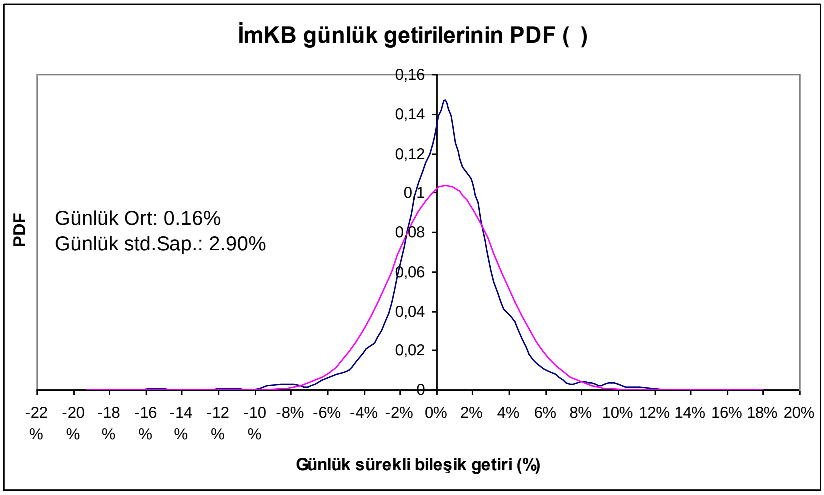
Bir çok finansal zaman serisinin, normallik varsayımından saptığı deneysel olarak gösterilebilir. Gerçekte gözlenen rastsal dalgalanmaları daha iyi açıklayabilmek için alternatif modeller önerilebilir. Çalışmada, İMKB 100 (1995 – 2006) , WIG 20 (1994 – 2005) ve CAC 40 (1993-2005) endekslerinin günlük getirileri analiz edilmiştir.



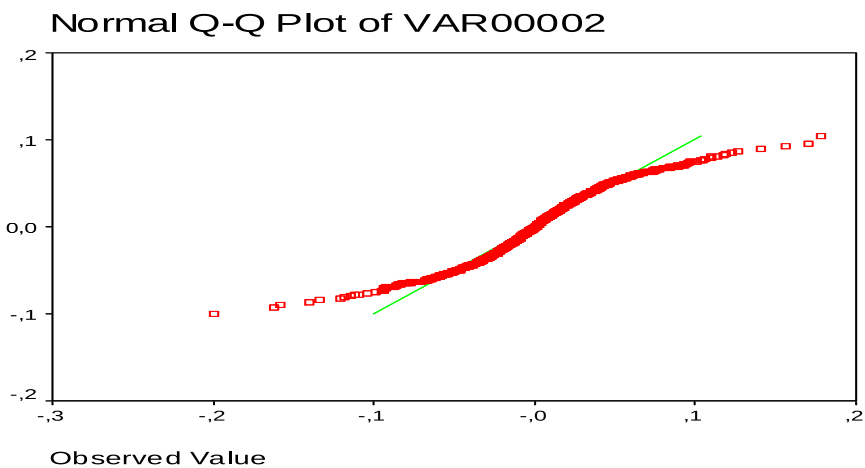
ŞEKİL 5. İMKB 100 Endeksi Getiri Serisi (1995 – 2006)



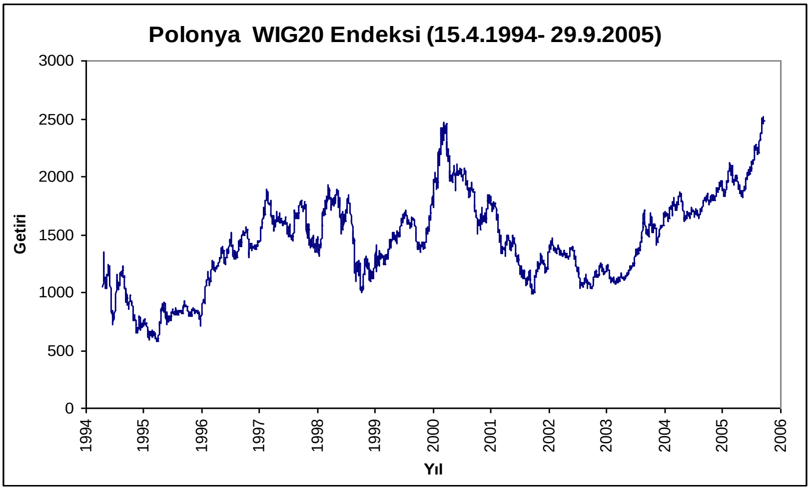
ŞEKİL 6. İMKB 100 Endeksi Tarihsel Fiyatları (1995 – 2006)



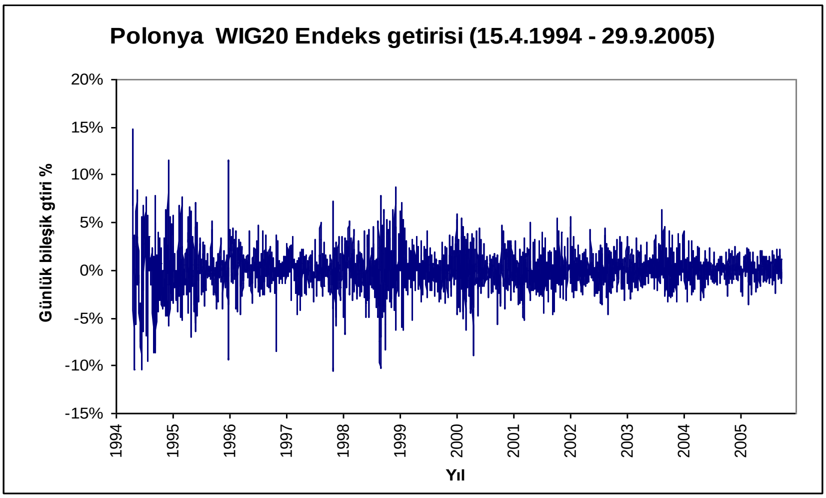
ŞEKİL 7. İMKB 100 Endeksi Günlük Getirilerin Frekans Dağılımı (1995 – 2006)



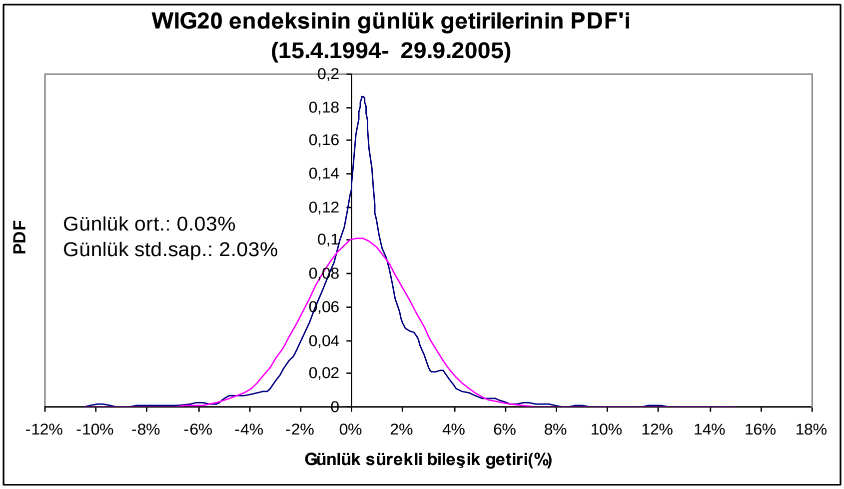
ŞEKİL 8. İMKB 100 Endeksi Getiri Serisi için (Q-Q) Grafiği (1995 – 2006)



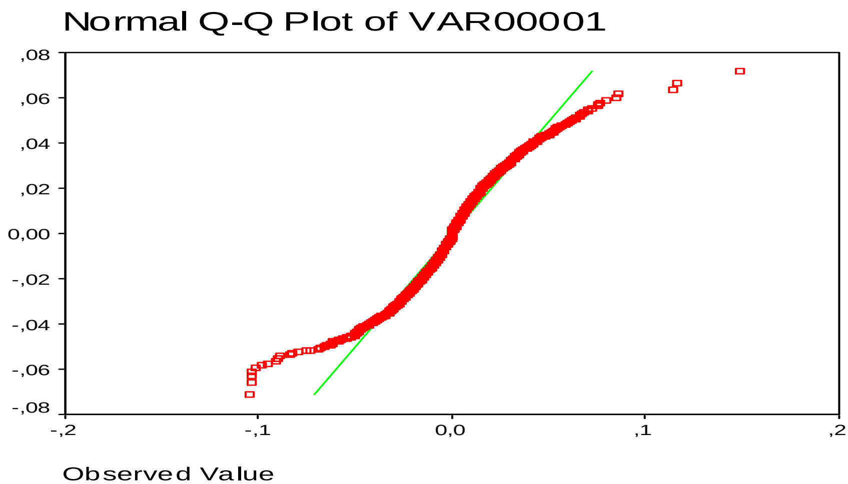
ŞEKİL 9. Polonya WIG 20 Endeksi Tarihsel Fiyatları (1994 – 2005)



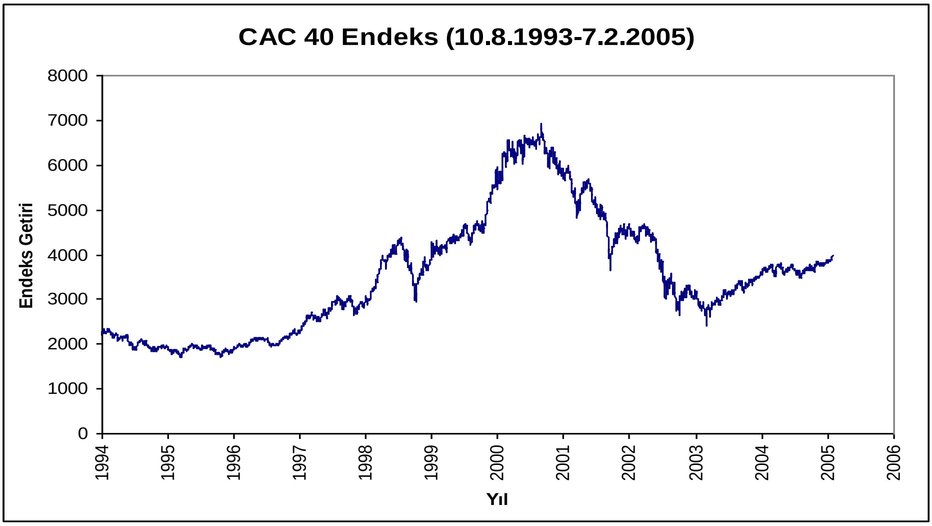
ŞEKİL 10. Polonya WIG 20 Endeksi Getiri Serisi (1994 – 2005)



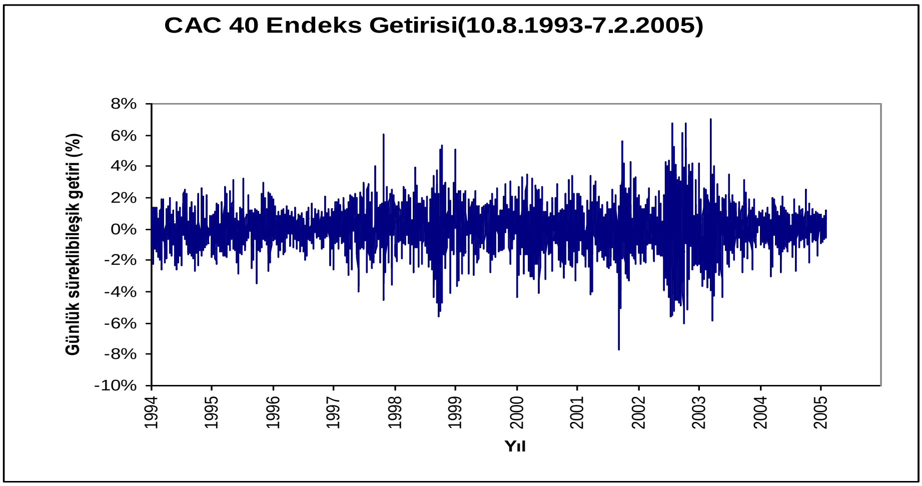
ŞEKİL 11. Polonya WIG 20 Endeksi Günlük Getirilerin Frekans Dağılımı (1994 – 2005)



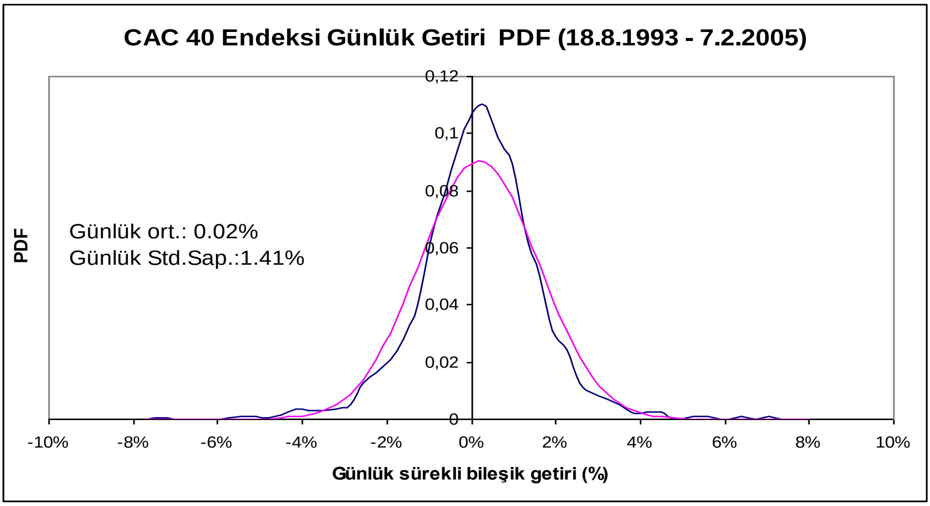
ŞEKİL 12. Polonya WIG 20 Endeksi Getiri Serisi için (Q-Q) Grafiği (1994 – 2005)



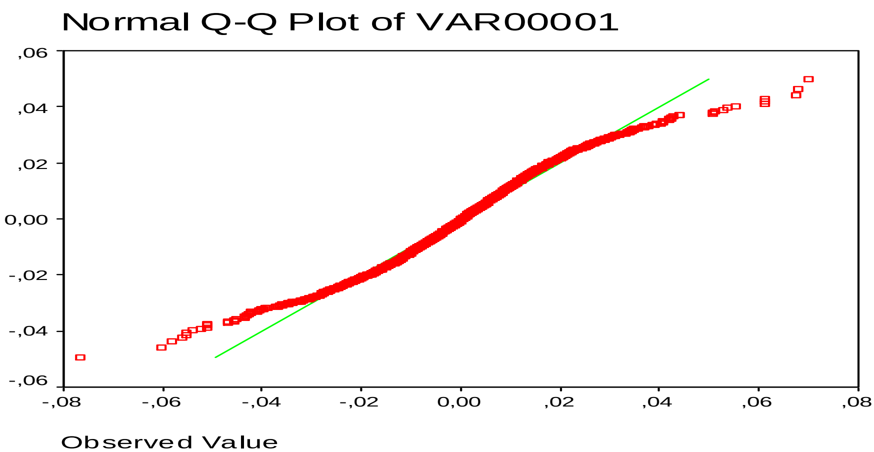
ŞEKİL 13. Fransa CAC 40 Endeksi Tarihsel Fiyatları (1993 – 2005)



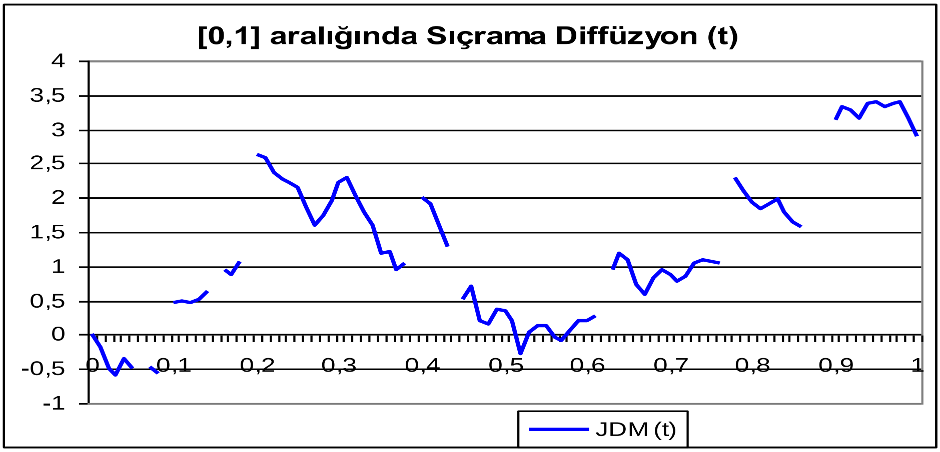
ŞEKİL 14. Fransa CAC 40 Endeksi Getiri Serisi (1993 – 2005)



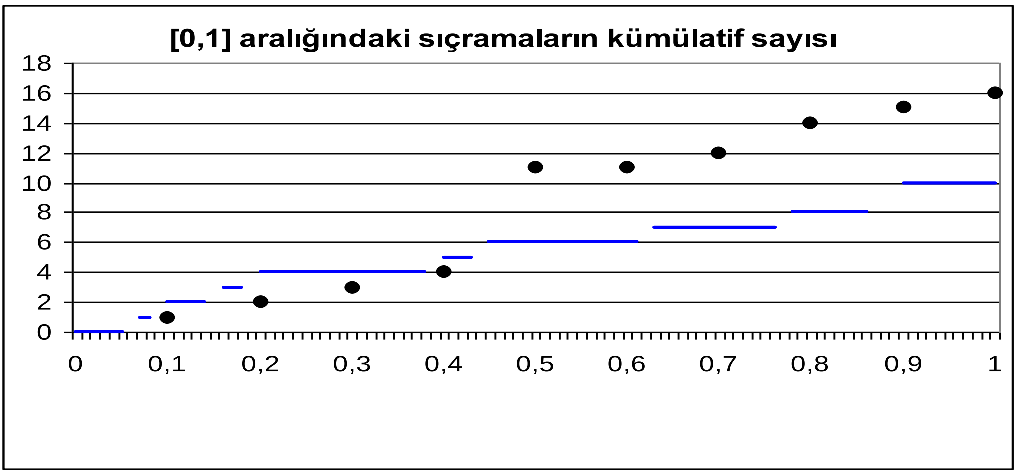
ŞEKİL 15. Fransa CAC 40 Endeksi Günlük Getirilerin Frekans Dağılımı (1993 – 2005)



ŞEKİL 16. Fransa CAC 40 Endeksi Getiri Serisi için (Q-Q) Grafiği (1993 – 2005)



ŞEKİL 17. Sıçrama Difüzyon Sürecinin $[0,1]$ aralığındaki Simülasyonu



ŞEKİL 18. Sıçrama Difüzyon Sürecinin $[0,1]$ aralığındaki Sıçramalarının Kümülatif Sayısı

Sıçrama Bileşeni ile Geometrik Brownian Hareket

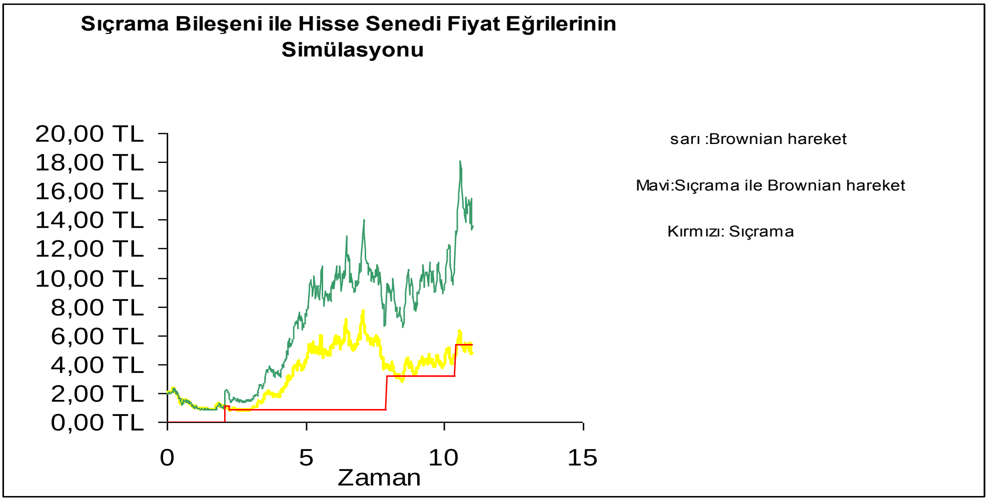
$$\Delta S \big/ S = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} + \kappa \Delta q$$

$$\Delta q = \begin{cases} 1 - \lambda \Delta t & 0 \quad ihtimalle \\ \lambda \Delta t & 1 \quad ihtimalle \end{cases}$$

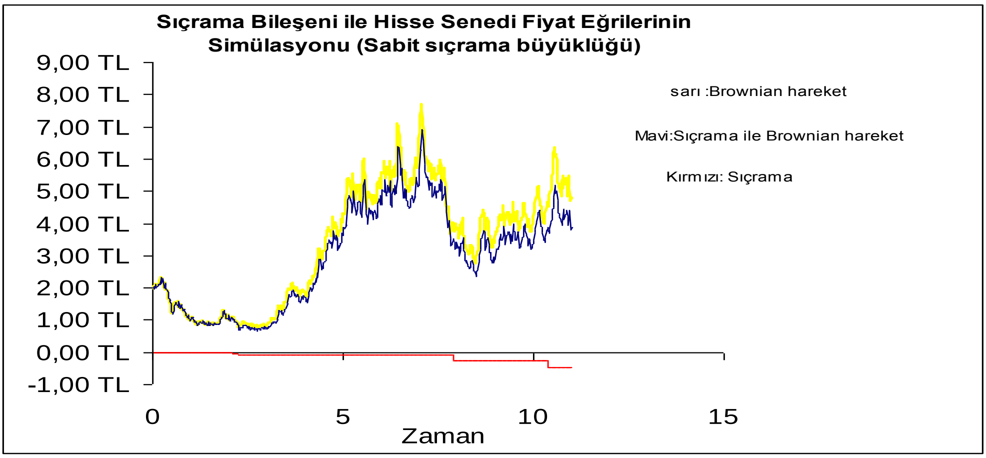
ΔS değişkeni , küçük bir Δt zaman aralığında hisse senedi fiyatındaki değişim
Parametreler:
μ (m) : Birim zamanda beklenen getiri oranı(genellikle yıllık)
σ (s) : Hisse senedinin oynaklığı (s ve m sabit kabul edilmektedir)
ε (e): Standart normal dağılımdan çekilmiş bir rastsal değişken, $\Phi(0,1)$
κ (k) :Mal fiyatındaki oransal artma olarak ölçülen ortalama sıçrama büyüklüğü
λ :Birim zamandaki (yıl) sıçrama oranı ,Poisson sürecinin yoğunluğu olarak da adlandırılır.

Sayısal örnek

t=0 zamanındaki hisse senedi fiyatı :	2,0 TL			
Zaman (T) :	11	Yıl (lar)		
Yoğunluk (□) :	% 20,0			
Oynaklık (□) :	% 40,0			
Poisson yoğunluk (□) :	0,50	Her bir yıldaki sıçramaların sayısı		
Sıçrama büyüklüğü (□):	% -5,0	Önceki hisse senedi fiyatının % si olarak		
Sıçramadan (J) sonra his.sen. Fiyatı % si :	% 95	Önceki hisse senedi fiyatının % si olarak		
□ Gamma = ln(1+□) :	-0,051293	ln(J) nin yoğunluğu		
J nin std si :	50,00%		J (-□')	J (+□')
□ T	0,0220		0,576204	1,566285



ŞEKİL 19. Sıçrama Bileşeni ile Fiyat Eğrilerinin Simülasyonu (Sıçrama büyüklükleri değişken)

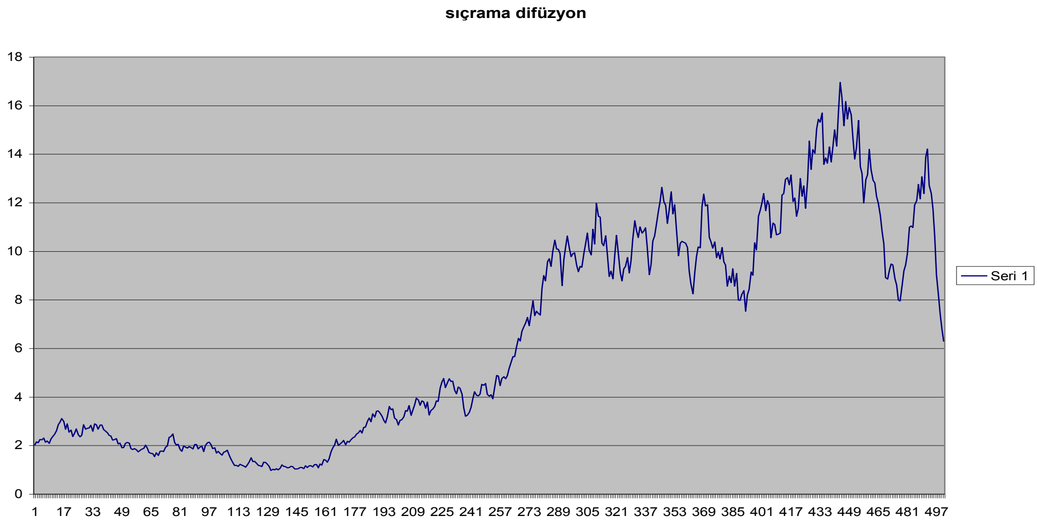


ŞEKİL 20. Sıçrama Bileşeni ile Fiyat Eğrilerinin Simülasyonu (Sıçrama büyüklükleri sabit)

Bağımsızlık: Bir çok model de getirilerin bağımsız dağılmış olduğu varsayımı kabul edilir. Bu hipotezin doğru olup olmadığı otokorelasyon testi ile değerlendirilebilir. Eğer veriler gerçekten bağımsız bir şekilde dağılmış ise korelasyon sabiti sıfıra yakın olmalıdır. Aksi taktir de verilerin bağımsız olduğu söylenemez. Bu durumda modelin parametrelerini tahmin etmek için, serideki her bir terimden serinin ortalamasını çıkartarak yeni bir seri elde edilir.

$$w_t = r_t - \bar{r}_d \qquad (21)$$

Sıçramalar: Serideki sıçramalar, orijinal seriden mutlak değeri 3σ ' dan daha büyük değerler süzülerek elde edilir. İkinci iterasyonda, kalan serinin standart sapması tekrar hesaplanır ve yeni standart sapmanın 3 katından $(3\sigma_1)$' nın mutlak değerinden daha büyük getiriler tekrar süzülür. Bu işlem süzülecek herhangi bir değer kalmayıncaya kadar devam eder. Bu algoritma, sıçramaların birikimli sıklığının tahmin edilmesine imkan verir.



Şekil 21. İMKB 100 Endeks Getirisi için Ortalamaya Dönme Sıçrama Difüzyon Eğrisi

5. Sonuç

Çalışmada üç değişik ülkenin piyasa endekslerinin günlük getirileri analiz edilmiştir. Her üç getiri seri için de deneysel dağılımın normal dağılıma göre daha sivri olduğu açıkça görülmektedir. Normal dağılım varsayımının gerçeği tam olarak yansıtmadığını göstermek için kullanılan grafik araçlardan biri olan Quantile-Quantile (Q-Q) grafiği serinin her üçü için de S şeklindedir. Eğer getiriler normal dağılmış olsalardı, (Q-Q) grafiğin doğrusal olması gerekirdi. (Q-Q) grafiği ayrıca getirilerin dağılımının kuyruklarda normalden iyice saptığını da göstermektedir. Ayrıca piyasalarda oynaklık kümelenmesi gözlenmektedir. Fiyatlar küçük çapta ani sıçramalara sahiptir. Fakat çeşitli ekonomik ve siyasi nedenlerden dolayı fiyatlar ani yükselme ve düşmeler gösterse bile uzun vadede ortalama seviyesine dönme eğilimi mevcuttur. Ortalamaya Dönme bileşenine sahip difüzyon süreçleri ve bu süreçlere sıçramaların eklenmesinin etkileri yapılan çeşitli simülasyonlarla araştırılmıştır. İMKB 100 endeksi için elde edilen ortalamaya dönme sıçrama difüzyon modelinden türetilen örneklem eğrisinin, İMKB 100 endeksinin gerçek verilerinin göstermiş olduğu eğriye çok yakın olduğu görülmektedir. Şu halde fiyatların gelişimini modellemek için rastsal yürüyüş süreci üzerine ortalamaya dönme süreci ve ayrıca bir de sıçrama süreci eklenirse, fiyat değişimleri daha gerçekçi bir şekilde modellenmiş olur.

Kaynakça

BALL, C.A. ve TOROUS, W.N. "A Simplified Jump Processes for Common Stock Returns" **The Journal of Finance and Quantitative Analysis**,18(1):53-65, 1983.

BLANCE, C. ve SARONOV, D., "Jump Diffusion Processes, Energy Price Processes Used for Derivatives Pricing and Risk Management",**Working Paper**,*2001*.

CARTEA,A. ve FIGUEROA ,M.G., "Pricing in Electricity Markets: A Mean Reverting Jump Diffusion Model with Seasonality", **Applied Mathematical Finance** Vol:12,Sayı. 4, pp. 313-325,2005.

CLEWLOW, L., STRICKLAND, C. ve KAMINSKI, V.," Extending Mean-Reverting Jump Diffusion", ***Energy Power Risk Management,Risk Water Group***, February, 2001.

ETHERIDGE,A, **A Course in Financial Calculus**,Cambridge University Press, 1.basım,2002.

MERTON, R.C.,"Option Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous",**Journal of Financial Economics,** 3, January – March: 125-44. 1976.

SCHWARTZ, E.S., "The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging", **The Journal of Finance,**52(3): 923-973, July, 1997.

SHIRYAEV, A.N., **Essential of Stochastic Finance : Facts, Models and Theory**. World Scientific, Pub.Co.1999.

STAMPFLI, J. ve GOODMAN, **The Mathematics of Finance: Modelling and Hedging**, Brooks/Coles Series in Advenced Mathematics, 2001.