SÜREKLİ YAPIDA BİR MODELİN İHTİMAL YOĞUNLUK FONKSİYONU OLARAK İNCELENMESİ

Dr. Bahadtin RÜZGAR
Marmara Üniversitesi
İkt. ve İd.Bil.Fak.
İşletme Bölümü

GİRİŞ

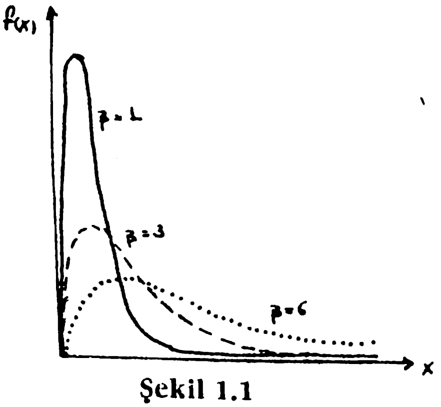
Matematik modeller her bilim dalının üzerinde durduğu önemli bir konudur. Kitle gelişim modelleri klasik olarak Sharpe ve Lotka (1911) tarafından tanımlanmıştır. Leslie (1945) kitle yapısının bir projeksiyon matrisi ile tanımlanabildiğini göstermiştir. L-Leslie matrisi kitle yapısını modelleştirmede daha sonraki yıllarda son derece sık kullanılmıştır. L-Leslie matrisi kitle yapısını modelleştirmede daha sonraki yıllarda son derece sık kullanılmıştır. L-Leslie matrisinden yararlanarak tanımlanan sürekli yapıda bir f(x) fonksiyonunun ihtimal yoğunluk fonksiyonu tanımlarını sağladığını gösterelim.

Tanım : X>0 sürekli bir tesadüfi değişken ve a>0, b>0 olmak üzere

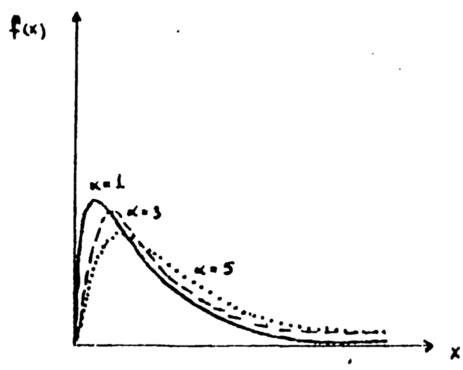
$$f(x)=\frac{\alpha+\beta}{\beta^2}\left[1-e^{-\frac{x}{\alpha}}\right]e^{-\frac{x}{\beta}} \qquad x\geq 0$$

$= 0$ Başka yerlerde

ihtimal yoğunluk fonksiyonudur f(x) fonksiyonunun bazı a ve b parametrelerine göre grafikleri Şekil 1.1 ve Şekil 1.2 de gösterilmiştir.



Şekil 1.1



Şekil 1.2

Teorem 1: f(x) ihtimal yoğunluk fonksiyonunun beklenen değeri,

$$E(X)=\frac{\beta\left(2\alpha+\beta\right)}{\alpha+\beta}$$

$$Var(X)=\frac{\beta^2\left(\beta^2+2\alpha^2+2\alpha\beta\right)}{\left(\alpha+\beta\right)^2}$$

varyansı ve

$$M(t)=\frac{\alpha+\beta}{\beta}\left[\frac{1}{1-t\beta}-\frac{\alpha}{\alpha+\beta-\alpha\beta t}\right]$$

moment doğurucu fonksiyonudur.

İspat: İhtimal yoğunluk fonksiyonunun beklenen değeri

$$E(X)=\int_0^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

ile verilir. O halde

$$E(X)=\int_0^{\infty} x\,\frac{\alpha+\beta}{\beta^2}\left[1-e^{-\frac{x}{\alpha}}\right]e^{-\frac{x}{\beta}}dx$$

gerekli işlemler yapılırsa beklenen değeri

$$E(X)=\frac{\beta\,(2\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}$$

bulunur. f(x) ihtimal yoğunluk fonksiyonunun varyansı

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

ile verilir. Varyansı bulmak için $E(X^2)$ yi hesaplamamız yeterli olacaktır.

İşlemin sonucu

$$E(X^2)=\int_0^{\infty} x^2 f(x)\, dx$$

$$E(X^2)=\int_0^{\infty} x^2\,\frac{\alpha+\beta}{\beta^2}\left[1-e^{-\frac{x}{\alpha}}\right]e^{-\frac{x}{\beta}}dx$$

bulunur. Varyans tanımında E(X) ve $E(X^2)$ eşitliklerinden yararlanarak

$$E(X^2)=\frac{(2\alpha\beta+2\beta^2)(\alpha+\beta)^2-2\alpha^3\beta}{(\alpha+\beta)^2}$$

bulunur. f(x) ihtimal yoğunluk fonksiyonunun moment doğurucu fonksiyonu

$$Var(X)=\frac{\beta^2(\beta^2+2\alpha^2+2\alpha\beta)}{\alpha+\beta^2}$$

gerekli işlemler yapılırsa

$$M(t)=\int_0^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx$$

$$M(t)=\int_0^{\infty} e^{tx} \frac{\alpha+\beta}{\beta^2}\left[1-e^{-\frac{x}{\beta}}\right] e^{-\frac{x}{\beta}}\,dx$$

bulunur. M(t) moment doğurucu fonksiyonundan yararlanarak beklenen

$$M(t)=\frac{\alpha+\beta}{\beta}\left[\frac{1}{1-t\beta}-\frac{\alpha}{\alpha+\beta-\alpha\beta t}\right]$$

değeri ve varyansı tekrar bulursak

ve

$$M'(t)=\frac{\alpha+\beta}{\beta}\left[\frac{\beta}{(1-t\beta)^2}-\frac{\alpha^2\beta}{(\alpha+\beta-\alpha\beta t)^2}\right]$$

olur. O halde beklenen değer ve varyans

$$M''(t)=2\beta(\alpha+\beta)\left[\frac{1}{(1-t\beta)^3}-\frac{\alpha^3}{(\alpha+\beta-\alpha\beta t)^3}\right]$$

dır.

$$E(t)=M'(0)=\frac{\beta(2\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}$$

$$Var(X)M''(0)-[M'(0)]^2=\frac{\beta^2(\beta^2+2\alpha^2+2\alpha\beta)}{(\alpha+\beta)^2}$$

Teorem 2: f(x) ihtimal yoğunluk fonksiyonunun karakteristik fonksiyonu

$$\varnothing(t)=\frac{\alpha+\beta}{\beta}\left[\frac{1}{1-i\beta t}-\frac{\alpha}{\alpha+\beta-i\alpha\beta t}\right]$$

dir.

İspat: f(x) ihtimal yoğunluk fonksiyonunun karakteristik fonksiyonu

$$\varnothing(t)=\int_0^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx$$

olarak tanımlanır. O halde karakteristik fonksiyon

$$\varnothing(t)=\int_0^{\infty} e^{itx} \frac{\alpha+\beta}{\beta^2}\left[1-e^{-\frac{x}{\alpha}}\right] e^{-\frac{x}{\beta}}\,dx$$

gerekli işlemler yapılırsa

$$\varnothing(t)=\frac{\alpha+\beta}{\beta}\left[\frac{1}{1-it\beta}-\frac{\alpha}{\alpha+\beta-i\alpha\beta t}\right]$$

olur. Moment doğurucu fonksiyon ile karakteristik fonksiyon arasında

$$\frac{d^1\varnothing(t)}{dt}\bigg|_{t=0}=iM'(t)\Big|_{t=0}$$

$$\frac{d^2\varnothing(t)}{dt}\bigg|_{t=0}=i^2M''(t)\Big|_{t=0}$$

$$\frac{d^k\varnothing(t)}{dt}\bigg|_{t=0}=i^kM^k(t)\Big|_{t=0}$$

formülleri geçerli olduğundan beklenen değer ve varyans

$$E(X)=\frac{\beta\,(2\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}$$

$$Var(X)=\frac{\beta^2\,(\beta^2+2\alpha^2+2\alpha\beta)}{(\alpha+\beta)^2}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 3: f(x) ihtimal yoğunluk fonksiyonunun a parametresi 0(sıfır) limitsel durumunda üstel dağılıma gider.

İspat: Üstel dağılımın ihtimal yoğunluk fonksiyonu g(x) model ihtimal yoğunluk fonksiyonu f(x) olmak üzere,

$$g(x)=\lim_{\alpha\to 0}f(x)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha+\beta}{\beta^2}\left[1-e^{-\frac{x}{\alpha}}\right]e^{-\frac{x}{\beta}}$$

$$\lim_{\alpha\to 0}e^{-\frac{x}{\alpha}}$$

$$g(x)=\frac{1}{\beta}e^{-\frac{x}{\beta}}$$

üstel ihtimal yoğunluk fonksiyonu olur. $E_Ü(X)$, $Var_Ü(X)$ ve $M_Ük(t)$ üstel dağılımın, E (X), Var(X) ve M(t) model dağılımının beklenen değeri, varyansı ve moment doğurucu fonksiyonlarını göstermek üzere,

$$E_ü(x)=\lim_{\alpha\to 0}E(x)$$
$$\beta=$$
$$Var_ü(x)=\lim_{\alpha\to 0}Var(x)$$
$$\beta^2=$$
$$E_ü(x)=\lim_{\alpha\to 0}E(x)$$
$$=\frac{1}{1-t\beta}$$

olur. O halde üstel dağılım modelimizin bir limitsel (a Æ 0) dağılımıdır.

SONUÇ: L-Leslie matrisinden tanımlanan sürekli bir f(x) fonksiyonu ihtimal yoğunluk fonksiyonu teoremlerini sağlamıştır.

KAYNAKLAR

* HOCKING, R. R. and LESLİE, P.H., Selection of Best Subsect in Regression Analysis, Technometrics, november 1968, ss.531-540.

* DRAPER, N.R. and SMITH, H., Applied Regression Analysis, John Wiley and Sons, The United States of America, 1966.

* LESLİE, P.H., Same Use of Matrices in Certain population Mathematics, Biometrika Vol.33,1945, ss.183-212.

* LESLİE, P.H., Same Further Notes on the Use of Matrices in Population Mathematics, Biometrika, Vol. 1948,-ss.213-245.
* POLLARD, J.H., Continuous-Time and Discrete-Time models of Population Growth, Journal of the Royal Statistical Society, Series A, 1969, ss. 80-88

* SHARPE, F.R. and LOTKA, A.J., A Problem in Age Distribution, Philosophical Magazine, 21,1911.

* SÖNDGERTH, D. and RICHTER, O., An Extension of The Leslie matris model for Describing Population Dynamisc of Shpecies with Several Development Stages, Biometrics 46, September 1990, ss.585-607.