PARAMETRİK VE DENEYSEL OLABİLİRLİK ORANLARININ İRDELENMESİ

Yrd.Doç.Dr.İsmail Hakkı ARMUTLULU
Marmara Üniversitesi
İktisadi ve İd.Bil.Fakültesi
İşletme Bölümü Öğretim Üyesi

Parametrik olabilirlik oranı ve olabilirlik oranı testi bilinen bir konudur. Düzgün en-güçlü testin (Uniformly most powerful test:umpu) uygulanamadığı durumlarda test sınıfına konan kısıtlarla daha dar anlamda UMP testleri aramak mümkündür. Bu testlere olabilirlik oranı testleri denir. Olabilirlik oran testinde temel düşünce olarak parametre uzayının Ho hipotezini sağlayan bir alt kümesi tanımlanır ve bu alt küme çerçevesindeki olabilirlik ile parametre uzayı çerçevesindeki olabilirliğin oranı tespit edilir. Bu oran test istatistiğini oluşturur.

Son yıllarda üzerinde çok çalışılan nonparametrik istatistik konularından biri de deneysel olabilirlik oranıdır. Burada da iki olabilirlik fonksiyonu ve bunların oranından oluşan istatistik belirlenerek bunun güven sınırları tayin edilmektedir. Bütün bu hesaplamalarda herhangi bir dağılım esas alınmadığından deneysel olabilirlik oranı bir nonparametrik istatistiktir. Son yıllarda çeşitli isimler altında bu konu işlenmektedir (1, 2, 4, 8).

1. Parametrik Olabililirlik Oranı

$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ ikişerli ve stokastik olarak bağımsız rassal değişkenler olup yoğunluk fonksiyonları $f(x_i\,;\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)$ olsun. Parametre uzayı Ω bütün $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)$ noktalarını kapsayan küme ve W ise bunun bir alt kümesi olsun. Basit veya karmaşık sıfı hipotezi $H_0\ (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m) \in W$ ve buna karşılık gelen bütün alternatif hipotezlerin testinde iki olabilirlik fonksiyonu

$$L(W) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m),\ (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m) \in W$$

$$L(\Omega) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m),\ (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m) \in \Omega$$

şeklinde tanımlanıp bunların maksimum değerleri $L(\widehat{W})$ ve $L(\widehat{\Omega})$ var olsun.

$$\lambda(X_1, X_2, \ldots X_n) = \lambda = \frac{L(\widehat{W})}{L(\widehat{\Omega})}$$

ifadesine olabilirlik oranı denir. Bu oran iki yoğunluk fonksiyonunun oranı olduğundan daima pozitif olacaktır. λ_0 Bir sabit olmak üzere

$$\alpha = \Pr\left[\lambda \leq \lambda_0,\ H_0\right]$$

olasılığı H_0'nın reddedilme olasılığıdır.

Örnek 1.1. Varyansı $a^2 = 1$ olan normal dağılımdan $x_1, x_2 \ldots\ldots, x_n$ örneklemi alınmış olsun. H_0: = 5 sıfı hipotezi ve H : 5 alternatif hipotez olsun. Bu durumda $\Omega = R$ olacaktır. Her X_i 'nin dağılımı normal olduğuna göre olabilirlik fonksiyonu

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(X_i, M) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\Sigma(X_i - \mu)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\Sigma(x_i - \bar{x})^2 \, \frac{n}{2}(\bar{x} - \mu)^2} ,$$

olur. Bu fonksiyonun üzerinde maksimumu için olacağından

$$L(\hat{\Omega}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\Sigma(x_i - \bar{x})^2 \, \frac{n}{2}(\bar{x} - \mu)^2}$$

olur. Aynı fonksiyonun w üzerinde maksimumu ise

$$L(\hat{W}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\left(\frac{1}{2}\right)\Sigma(X_i - 5)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\left(\frac{1}{2}\right)\Sigma(x_i - \bar{x})^2 - \frac{n}{2}(\bar{x} - 5)^2}$$

olup, olabilirlik oranı

$$\lambda = e^{-\left(\frac{n}{2}\right)(\bar{x} - 5)^2}$$

olur. Burada, eğer x=5 ise $\lambda=1$ olur. x'nin değeri 5'ten uzaklaştıkça λ 'nın değeri sıfıra yakınsar. O halde λ_0 bire yakın bir değer olmak üzere $0 < \lambda < \lambda_0$ olur. Dağılım teorisine göre H_0 hipotezi altında x'nın dağılımı, ortalaması 5 ve varyansı 1/n olan bir normal dağılım; $n(x-5)^2$ ise $X^2_{(1)}$dağılımı olacaktır. Buradan hareketle (- 2log λ) istatistiği bir serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahiptir.

2. Wilks Teoremi

Bu teorem Wilks tarafından 1938 yılında oluşturulmuştur.(3).
Teorem, parametrik ve deneysel olabilirlik oranının dağılımları ile ilgili olup genel ifadesinin kısmi açıklaması aşağıdaki gibidir.

Genel düzenlilik koşullarını gerçekleyen

$f(x;\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots\ldots, \theta_n)$ yoğunluk fonksiyonuna sahip bir dağılımdan $x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots, x_n$ örnekleme alınmış ve parametre uzayı 'nın boyutu k olsun. $\theta^\circ_1, \theta^\circ_2, \ldots, \theta^\circ_t$ bilinen değerler olmak üzere

$$H_0 : \theta_1 = \theta^\circ_1, \theta_2 = \theta^\circ_2, \ldots, \theta_t = \theta^\circ_t, t>k$$

hipotezinin testinde n yeterince büyük olmak üzere ho hipotezi altında -2logλ istatistiğinin dağılımı t serbestlik dereceli ki-kare dağılımıdır.

Teoremde görüldüğü gibi 'nın boyutu k olurken, bunun alt kümesi olan W'nın boyutu ise t olmaktadır. Bu teoreme dayanarak Owen, 1987'deki makalesinde deneysel olabilirlik oranı için güven aralığını oluşturmuştur. Bu konu çalışmanın üçüncü bölümünde yer almaktadır.

3. Deneysel Olabilirlik Oranı

Güven aralığının oluşturulmasında deneysel olabilirlik yöntemi Owen (1987) tarafından geliştirilmiştir. Çok değişkenli bir dağılımda gözlem noktalarını ihtiva eden aralığın hesaplanmasında Owen'nı hareket noktası Thomas ve Grunkemeier'in (1975) aralık takdiri olmuştur. Owen 1990'da yayınladığı makalesi ile bu yöntemi Hall tarafından 1987'de geliştirilen bootstrap yöntemine alternatif olarak da sunmuştur. Bu yöntemde, parametrik olabilirlik yönteminde olduğu gibi hareket noktası bir dağılım fonksiyonu değildir. Şimdi bu yöntemin temel varsayımlarını görelim: x_1 , x_2,....., x_n bir rassal örneklem olsun. Bu örneklemin alındığı farazi dağılım F_0, r değişkenli bir multinom dağılım olup ortalama vektörü μ_0 ve nonsingüler kovaryans matrisi Σ_0 olsun. Her x_i değerine karşılık gelen yoğunluk p^i olmak üzere yoğunluk vektörü $p=(p^1 ,.....,p^n)$ olsun. Varsayılan F_0 dağılımının parametre vektörü $\theta = (\theta^1 ,.....,\theta^q)^T$, q bileşenli ($q \leq r$) olup bu farazi dağılım altında $\theta_0= \theta\ (\mu_0)$ şeklinde bir beklenen değerler fonksiyonu olsun. $p^i \geq 0$, $\Sigma p^i = 1$ ve ilgilenilen parametrenin özel bir değeri θ için $(\theta\ (\Sigma X_i\ p^i) = \theta_1)$ olabilirlik fonksiyonu bütün F_p dağılımları üzerinden

$$L(\theta_1) = \max \prod_{i=1}^{n} p^i$$

olur. Eğer hiçbir F_p dağılımı için bu kısıtlar sağlanmıyorsa $L(\theta_1)=0$ olur. $\prod p^i$ ifadesinin maksimum olabilmesi için $p^i = n^{-1}$ olması gerektiğinden deneysel olabilirlik fonksiyonu $\theta = \theta\ (n^{-1} \sum x_i)$ için maksimum olacaktır. Bu da maksimum olabilirlik takdircisi x (örneklem ortalaması) dır. Buradan deneysel olabilirlik oranı

$$W_0 = -2 \log \{L(\theta_0)/L(\theta)\}$$

olur. Bu açıklamalara göre iki değişkenli bir dağılımın korelasyon katsayısı θ için q = 1 olurken r=5 olacaktır. Çünkü korelasyon katsayısı beş beklenen değerin {E(X), E(Y), E(X^2), E(Y^2), E(XY)} fonksiyonudur. Varyansın oranında ise q=1 ve r=4'tür. {E(X), E(Y), E(X^2), E(Y^2)} . Tek değişkenli bir yoğunluğun ortalama ve varyansı için ise q = 2 ve r = 2 olur. Bütün bu problemlerde temel varsayım ise bilinmeyen parametre, beklenen değerlerin sürekli bir fonksiyonudur ve bu fonksiyon sonsuz sayıda türevlenebilmektedir. Aynı varsayım Wilks'in teoreminde de düzenlilik koşulları içerisindedir.

Yukarıdaki (1) numaralı eşiklikte θ_0, parametrenin gerçek değeri olmak üzere $\sqrt{n}\ \theta$ 'nin asimtotik varyans matrisinin rank'ı q ise Wilks'in teoremine göre W_0'ın dağılımı q serbestlik dereceli ki-kare dağılımıdır (3). Ki-kare dağılımına göre,

$$\Pr (X^2_q \leq c)= 1 - \alpha$$

olacağından arzu edilen güven bölgesi;

$$R_c = \{\theta : W_0 \leq c\}$$

olacaktır. Parametrenin gerçek değeri θ_0'rın bu bölgede yer alması olasılığı $n \to \infty$ için

$$\Pr(\theta_0 \in R_c)=\Pr\{W_0 \leq c\}\ -\ 1-\alpha$$

olacaktır. Güven bölgesinin sınırlarını oluşturan noktalar kümesi

$$S_c =\{\theta : W_0 =c\}$$

olmak üzere sınır elemanlarını bulmada genel olarak Newton algoritması kullanılabilir (1). Ancak tek değişkenli yoğunluklar için θ, skaler olduğundan $\theta(\mu)$ beklenen değerlerin fonksiyonudur. Başlangıç koşulları

$$-2 \Sigma \log (np^i)=c, \Sigma p^i = 1$$

olup c değeri Ki-kare tablosundan bulunarak lagrange çarpanları yöntemi ile güven sınırları bulunabilir.

Örnek 3.1: Tek değişkenli bir dağılımın ortalaması için güven koşulları esas alınarak denklemlerimiz

$$- 2 \Sigma \log (np)-c=0$$
$$\Sigma p^i-1 = 0\equiv$$

olur. ve Lagrange çarpanları olmak üzere p x 'nin dönüm noktaları

$$\Sigma P^iX_i + \beta\left\{\sum_{i=1}^{n} \log(np^i) + \frac{1}{2}c\right\} + \gamma\left(\Sigma p^i-1\right)$$

ifadesinin dönüm noktaları ile aynı olur. burada p^i'lere göre türev alınıp sıfıra eşitlendiğinde ve (ß, r) yerine (λ, μ) değişkenlerini koyarak

$$p^i = \frac{1}{n\left\{1+\lambda(x_i-\mu)\right\}}, \left(1 \leq i \leq n\right)$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$\Sigma p^i =1 \Leftrightarrow \Sigma p^i(x_i - \mu) = 0$$

$$\Sigma \log\left(np^i\right) = -\frac{1}{2}c \Leftrightarrow \Sigma\left\{\log\left(1 + \lambda\left(x_i - \mu\right)\right)\right\} = \frac{1}{2}c$$

olur. Buradan

$$f_1(\lambda,\mu) \equiv \Sigma \{1+\lambda (x_i - \mu)\}-1(x_i - \mu) = 0$$

$$f_2(\lambda,\mu) \equiv \Sigma \log \{1+\lambda (x_i - \mu)\} - (1/2) c = 0$$

eşitliklerinin birlikte çözümünden bulunacak (λ_1, μ_1) ve (λ_2, μ_2) noktalarından büyük olan μ_i değeri güven bölgesinin üst sınırını, küçük olan μ_i değeri de alt sınırı oluşturacaktır.

Örnek 2: Tek değişkenli bir dağılımın varyansı için güven aralığını bulunuz.

Bu örnekte 0 (p) = p x - p x) olacağından, bu ifade için dönüm noktaları bulunacaktır. Birinci örnekte olduğu gibi burada da

$$f_1(\lambda, \mu, \tau) \equiv \Sigma [1+\lambda \{(x_i-\mu)^2-\tau\}]^{-1} (x_i-\mu) = 0$$

$$f_2(\lambda, \mu, \tau) \equiv \Sigma [1+\lambda \{(x_i-\mu)^2-\tau\}]^{-1} \{(x_i-\mu)^2 - \tau\} = 0$$

$$f_3(\lambda, \mu, \tau) \equiv \Sigma \log [1+\lambda \{(x_i-\mu)^2-\tau\}]^{-1} - (1/2) c = 0$$

denklemlerinin çözümünden bulunacak en yüksek τ_i değeri üst sınır, en küçük τ_i değeri alt sınır olacaktır.

Yukarda sunulan her iki örnekte de tek değişkenli dağılım kullanıldığından Newton algoritmasına gerek duyulmadan lagrange çarpanları yöntemi kullanılmıştır.

3.1. Deneysel Olabilirlik Yönteminde Düzeltmeler

Deneysel olabilirlik yönteminde yaklaştırmalardan dolayı meydana gelecek hataların iki yönlü düzeltmesi söz konusudur. Birincisi güven sınırları üzerindeki Bartlett düzeltmesi, diğeri ise güven bölgesinin merkezi için yapılan düzeltmedir. Bu düzeltmeler Bootstrap gibi son yıllarda önerilen diğer nonparametrik yöntemlere uygulanamadığından deneysel olabilirlik yönteminin üstünlüğü olarak gösterilmektedir(8), (3).

Deneysel Olabilirlik Bölgesi

$$R_c = \{\theta : W_0 \leq c\}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu bölgenin sınırları üzerinde Bartlett düzeltmesi yapıldığında ise

$$R'_c = \{\theta : W_0 \leq c\,(1 + \hat{a}/n)\}$$

şeklinde olur. Güven bölgesinin merkezinde yapılan düzeltmeden sonra ise güven bölgesi

$$R''_c = \{\theta + \psi/n : W \leq c\,(1 + b/n)\}$$

olur. burada $\hat{a}$, b ve ψ değerlerinin bulunuşu için uzun hesaplamalar yapılmaktadır(5). Ancak özünde her üç değerde çeşitli mertebeden momentler cinsinden bulunabilmektedir. Örneğin, daha önce sunulan tek değişkenli dağılımın ortalaması için olan güven bölgesinde uygulayalım:

$$\theta_0 = E(x),\ \sigma^2 = \mathrm{var}(x),\ \mu_3 = \frac{E(x-E(x))^3}{\sigma^3},\ \mu_4 = \frac{E(x-E(x))^4}{\sigma^4}$$

şeklindeki anakütle momentlerine karşılık örneklemden

$$\bar{x} = n^{-1}\Sigma x_i,\ \hat{\sigma}^2 = n^{-1}\Sigma(x_i-\bar{x})^2,\ \mu_3 n^{-1}\Sigma\frac{(x_i-\bar{x})^3}{\hat{\sigma}^3},\ \mu_4 n^{-1}\Sigma\frac{(x_i-\bar{x})^4}{\hat{\sigma}^4}$$

momentleri takdir edilmiş olsun. Hall (1990)'ın geliştirdiği formülasyona göre

$$a = \frac{1}{2}\mu_4 - \frac{1}{3}\mu_3^2$$

olup, bunun takdiri değeri,

$$\hat{a} = \frac{1}{2}\hat{\mu}_4 - \frac{1}{3}\hat{\mu}_3^2$$

olur. Merkezi düzeltmedeki ψ ve b için ise

$$\psi = -\frac{1}{2}\mu_3,\ b = \frac{29}{12}\mu_3^2 - \frac{1}{2}\mu_4$$

olup, bunların takdiri değerleri de

$$\hat{\psi} = -\frac{1}{2}\hat{\mu}_3,\ \hat{b} = \frac{29}{12}\hat{\mu}_3^2 - \frac{1}{2}\hat{\mu}_4$$

olur. Basit olarak θ_0'nın normal dağılıma yaklaşım kullanılarak güven aralığı, $z = \sqrt{c}$ olmak üzere

$$\left(\bar{x} - n^{-\frac{1}{2}}\hat{\sigma} z,\ \bar{x} + n^{-\frac{1}{2}}\hat{\sigma} z\right)$$

olduğu bilinmektedir. Bu aralığa karşılık gelen deneysel olabilirlik aralıkları düzeltmelerden önce ve sonra sırasıyla,

$$R_c = \begin{bmatrix} \bar{x} + n^{-\frac{1}{2}}\hat{\sigma}\left\{-z + n^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{3}\hat{\mu}_3 z^2 + n^{-1}\left(\frac{2}{9}\hat{\mu}_3^2 - \frac{1}{4}\hat{\mu}_4 + \frac{1}{2}\right) z^3\right\}, \\ \bar{x} + n^{-\frac{1}{2}}\hat{\sigma}\left\{z + n^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{3}\hat{\mu}_3 z^2 - n^{-1}\left(\frac{2}{9}\hat{\mu}_3^2 - \frac{1}{4}\hat{\mu}_4 + \frac{1}{2}\right) z^3\right\} \end{bmatrix}$$

$$R_c' = \begin{bmatrix} \bar{x} + n^{-\frac{1}{2}}\hat{\sigma}\left\{-z + n^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{3}\hat{\mu}_3 z^2 + n^{-1}\left(\frac{2}{9}\hat{\mu}_3^2 - \frac{1}{4}\hat{\mu}_4 + \frac{1}{2}\right) z^3 - n^{-1}\left(\frac{1}{4}\hat{\mu}_4 - \frac{1}{6}\hat{\mu}_3^2\right) z\right\}, \\ \bar{x} + n^{-\frac{1}{2}}\hat{\sigma}\left\{z + n^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{3}\hat{\mu}_3 z^2 - n^{-1}\left(\frac{2}{9}\hat{\mu}_3^2 - \frac{1}{4}\hat{\mu}_4 + \frac{1}{2}\right) z^3 + n^{-1}\left(\frac{1}{4}\hat{\mu}_4 - \frac{1}{6}\hat{\mu}_3^2\right) z\right\} \end{bmatrix}$$

$$R_c'' = \begin{bmatrix} \bar{x} + n^{-\frac{1}{2}}\hat{\sigma}\left\{-z + n^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{6}\hat{\mu}_3(2z-3) + n^{-1}\left(\frac{2}{3}\hat{\mu}_3^2 - \frac{1}{4}\hat{\mu}_4 + \frac{1}{2}\right) z^3 - n^{-1}\left(\frac{29}{24}\hat{\mu}_3^2 - \frac{1}{4}\hat{\mu}_4\right) z\right\}, \\ \bar{x} - n^{-\frac{1}{2}}\hat{\sigma}\left\{z + n^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{6}\hat{\mu}_3(2z-3) - n^{-1}\left(\frac{2}{3}\hat{\mu}_3^2 - \frac{1}{4}\hat{\mu}_4 + \frac{1}{2}\right) z^3 + n^{-1}\left(\frac{29}{24}\hat{\mu}_3^2 - \frac{1}{4}\hat{\mu}_4\right) z\right\} \end{bmatrix}$$

şeklinde olur.

4. Sonuç

Parametrik olabilirlik fonksiyonunda, başlangıç olarak ana kütlenin dağılımının varsayıldığı bilinmektedir. Diğer taraftan, bütün nonparametrik çalışmalarda olduğu gibi deneysel olabilirlik fonksiyonunda varsayılan özel bir dağılım yoktur. Başlangıç olarak farazi bir F dağılımı ele alınmakta ve bu da E (X)'in çeşitli mertebelerden fonksiyonudur. Hall ve arkadaşları 1989 da yayınladıkları çalışmalarında her iki benzerlik oranının logaritmasını birinci ve ikinci mertebeden seriye açarak incelemişlerdir(2). Bu inceleme sonucu;

- Her iki fonksiyonunda (beklenen değerler cinsinden olsa da, olmasada) ortalama vektörünün (vector of means) düzgün (smooth) olduğunu;
- Birinci mertebeden, her iki fonksiyonun aynı sonucu tutarlı olarak vermediğini;
- Ancak üstel sınıftan dağılımlarda olduğu gibi sınıf özelliği gösteren dağılımlarda her iki yöntemin benzer sonuçlar verdiği tespit edilmiştir.

Peter Hall ve Barbara La Scala 1990'da yayınladıkları makalede deneysel olabilirlik fonksiyonunun üstünlüklerini şöyle sıralamaktadırlar:

- Deneysel olabilirlik güven bölgesinin şekli doğrudan gözlem değerlerine bağlıdır.
- Deneysel olabilirlik bölgesi Bartlett düzelmesinin uygulamasına müsaittir.

- Deneysel olabilirlik bölgesi için ölçek veya çarpıklık parametrelerini takdir etmek gerekli değildir.
- Deneysel olabilirlik bölgesi için yayılma bandı sabit kalmak üzere çeşitli dönüşümleri (transformations) yapmak mümkündür.

Yukarda sayılan bütün özellikler şüphesiz önemlidir. Bu özelliklerle birlikte takdir işleminde deneysel olabilirlik yönteminin, araştırmacılar için yeni bir yöntem oluşu en önemli özelliktir kanısındayım. 1920'li yıllara kadar en önemli takdir yöntemi olarak moment yöntemi görülmekteydi. Bu yıllarda Fisher, değerli çalışmaları sonucu alternatif takdir yöntemi olarak olabilirlik yöntemini geliştirmiştir. Olabilirlik yöntemi, analiz kurallarını kullanabilme açısından moment yönteminden daha sağlıklı sonuçlar verebilmektedirler. En azından moment yöntemi ile bulunan takdircilerin tutarlı ve yeterli oluşları ispatlanabilmektedir. 1980'li yılların sonlarında ise deneysel olabilirlik yönteminin gelişimi görülmektedir. Bu yöntem diğerlerini tamamlayıcı olarak görülebilir. Özünde olabilirlik yöntemi olan bu yöntemde, farazi dağılım F, çeşitli mertebeden beklenen değerlerin bir fonksiyonudur. Nonparametrik oluşuyla da kullanıcıya serbestlik kazandırmaktadır.

Dipnotlar

(1) Hall, P. (1987) On the bootstrap and Likelihood-based Confidence regions., Biometrika, 74., 481-483

(2) Hall, P., DıCiccio, T.J., romano, J.P., (1989) Comprison of parametric and empirical Likelihood functions. Biometrika, 76.465-476

(3) Hall, P. and Scala, B.L. (1990) Methodology and Algorithms of Empirical Likelihood, International Statistical Review, 58, 109-127

(4) Hall,P.(1990). Pseudo-Likelihood theory for empirical Likelihood. Ann. statist. 18, 109-127.

(5) Hall, P., DiCiccio, T.J., Romano, J.P.(1991). Empirical Likelihood ise Bartlett correctable, Ann. Statist. 19., 1053-1061

(6) Hogg, R.V. and Craig A.T., Introduction to Mathematical Statistics, Macmillan Publishing Co., New York, 1970

(7) Moralı, S. İstatistik Teorisine Giriş, özarkadaş Matbaası İstanbul 1973

(8) Owen, A.B.,(1990). Empirical Likelihood confidence regions Ann. Statist. 18., 90-120

(9) Thomas, D.R. and Grunkemeier, G.L.(1975). Confidence Interval estimation of survival probabilities for censored data. J.Ann. Statist.Assoc. 70,865-871