PAYLARIN BAŞARI ESASINA GÖRE DAĞILIMI

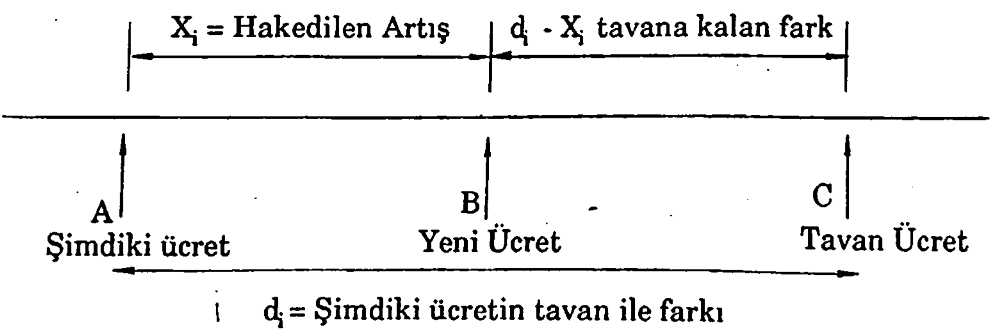
*Dr. Y.Müh. Özcan Baytekin

Bir şirketin servislerinde aynı işi yapan kişilerin aynı ücreti almadığı sıkça rastlanan bir durumdur. Farklı ücretlerin çeşitli sebebleri olabilir. Memurların hizmet müddetleri farkı, memurun verimliliği v.s. Bununla beraber her iş için yerleşmiş bir taban ve tavan sınırlarıda mevcuttur.

Bir çok şirket, hizmetlerinde çalışan elemanlarının ücretlerini her sene yeniden gözden geçirir. Bu yeniden gözden geçirmelerde, elemanlar genel bir hayat pahalılığı artışı alırlar ki bu artış genellikle yüzde olarak her eleman için aynı olur, veya bazen başarıya dayanan bir ücret artışı da söz konusu olabileceği gibi, her iki nedene dayanan artışlarında gerçekleştirildiği görülmüştür. Bu makale böyle bir problem çözümü için matematiksel bir model geliştirecektir.

MODEL :

Hayat pahalalığı zammı üretleri belli bir sayı ile çarparak bulunablir, fakat başarıya dayanan bir ücret artışını optimum bir şekilde belirleme için, bir matematik model geliştirmek gereklidir. Şimdi ücret artışı tartışılan bir elemanın durumunu şekil (1) ile ortaya koyalım.



Şekil 1: Pay Dağıtım Modeli

(*) Marmara Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi

Burada tavan ücret bu iş kolu için konu olan elemanın alabileceği maximum ücrettir, X_i konu olan elemanın ücretindeki başarı artışıdır. ($X_i \geq 0$), şimdiki ücreti ile tavan ücret arasındaki fark d_i ile gösterilmiştir, nihayet yeni ücret ile tavan ücret arasındaki fark $d_i - X_i$ ile gösterilmiştir.

Geriye her elemanın başarısını gösterecek bir α_i katsayısı belirlemesi kalıyor. Modelin en zor yanı bu katsayıyı belirlemektir diyebiliriz: Konu olan i elemanı ile aynı işte çalışan belli sayıda elemana ve üst yöneticiye bir değerlendirme formu dağıtılır : Her eleman için ortalama bir değer elde edildikten sonra, bu değer aynı iş kolundaki elemanların elde ettikleri en yüksek değere aynı iş kolundaki elemanların elde ettikleri en yüksek değere bölünerek, i elemanının α_i başarı katsayısı elde edilir. Bu sayı i elamanının diğer elemanlara relatif olarak değerini verir.

Her eleman tavana en yakın ücreti almak ister, yani i elemanının isteği $d_i - X_i$ nin minimum olmasıdır. O halde mükafat olarak dağıtılacak paranın en iyi şekilde dağıtımı aşağıdaki ifadeyi en küçükleme olmalıdır.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (d_i - X_i)$$

Yukarıdaki toplam, i elemanın relatif (izafi) kıymet katsayısı ile yeni ücretinin tavan ücrete olan farkın çarpımından oluşmuştur. n aynı işe sahip toplam eleman sayısını ifade etmektedir. Elemanlara mükafat olarak dağıtılacak para miktarı belli bir P değeri olacağına göre bu problemde şöyle bir kısıt olması doğaldır.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \leq P$$

Fakat açıktır ki her elemanın yeni ücret tavanı geçemeyeceğine göre, her eleman için aşağıdaki kısıta da uymak mecburiyeti doğaldır. Amacımız B noktasının C noktasına yaklaşmasıdır.

$$X_i \leq d_i$$

Şimdi amaç fonksiyonunu, cebir kurallarını uygulayarak basitleştirmeye çalışalım.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (d_i - X_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i - \alpha_i X_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$$

Fakat belli bir eleman için α_i ve d_i sayıları sabittir, böylece α_i d_i toplamı da sabit olacaktır, bu sabiti K ile gösterirsek, amaç fonksiyonu aşağıdaki şekli alır.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (d_i - X_i) = K - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$$

Biz eşitliğin sağ tarafını en küçüklemek istiyoruz fakat aynı amacı eşitliğin sol tarafındaki toplamı en büyükliyerek yapamaz mıyız? Bu sorunun cevabının evet olduğunu 2 şekilde ispat edebiliriz.

$$\text{Min } Z = K - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$$

$$\text{Max } Z = -K + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$$

Eşitliğin her 2 tarafıda eksi ile çarpılırsa eşitsizlik yön değiştirir.

Bir fonksiyonun minimum yapmak o fonksiyonun eksi ile çarpımını maksimum yapmak demektir.

Biz problemin başında her elemanın tavan ücrete en yakın olmak isteyeceğini düşünerek, artıştan sonraki ücretlerin tavana olan farklarını en küçüklemekten yola çıktık. Fakat aynı amaca, şimdiki ücretten tavana doğru en uzak olarakta varabiliriz. Yani her eleman $d_i - X_i$ sinin en küçük yanı X_i sinin en büyük olmasını ister. Böylece amaç fonksiyonu

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ yi en büyükleme şeklini alır.

Netice olarak en küçükleme problemini en büyükleme problemine çevirdik. Bunu, en büyükleme problemininn cebirsel çözümünün, en küçükleme problemine göre çok daha basit olduğu için gerçekleştirdik.

Şimdiki problemimizin son şeklini formüle edelim.

En büyükleme

$$Z_{Max} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$$

Aşağıdaki kısıtlamalarla

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \leq P$$

$$X_i \leq d_i$$

$$X_i \geq 0$$

Yukarıdaki problemi çözdüğümüzde, başarı katsayıları o şekilde oluşmuş olabilir ki bazı elemanlar hiç artış almıyabilirler. Bu durum menfî bir moral etkisi yaratıyorsa, yönetim çeşitli çözümler getirebilir. Bizim tarafımızdan şöyle bir çözüm önerilebilir: Dağıtılacak paranın yüzde A kadarı elemanlar arasında eşit bölüştürülebilir, yani yukarki probleme şöyle bir kısıt ilave edilir.

$$x_i \geq \frac{P.A}{n}$$

Netice olarak problem 2 şekilde formüle ediliyor.

Birinci Tip

En Büyükleme : $Z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$

X_i

Kısıtlayıcılar $\sum_{i=1}^{n} X_i \leq P$

$X_i \leq d_i$

İkinci Tip

En Büyükleme : $Z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$

X_i

Kısıtlayıcılar $\sum_{i=1}^{n} X_i \leq P$

$X_i \leq d_i$

$$X_i \geq \frac{P.A}{n}$$

Görülüyorki payların hakça dağıtımı problemi lineer programlama ile çözülebilir. Lineer programlama problemlerinin çözümünde kısıtlayıcılar ikiyi geçince başvurulan yöntem simplex metodudur. Bu metotta bütün kısıtlayıcılar ≥ 0 veya ≤ 0 tipinde olursa çözüm kolaylaşır. Fakat yukarki ikinci tipte hem ≤ 0, hemde ≥ 0 görülüyor. Fakat biz nümerik misalde ki büyük veya eşit bir değer şeklindeki kısıtlamaları basit bir değişken dönüşümü tekniği ile büyük veya eşit sıfır şekline dönüştüreceğiz.

UYGULAMA:

Yukarıda anlatılan şekildeki bir yaklaşım ile çok çeşitli başka problemlere de çözüm getirilebilir.

Mesela 6 ana bayii olan bir otomabil fabrikası düşünelim. Bayilerine yılda en fazla 1700 araba veriyor. Fabrika bu sene üretimini 400 adet arttırıyor. ve bu miktarı bayileri arasında başarı esasına göre dağıtmayı planlıyor. Bu amaçla yapılan değerlendirme sonucu ve şimdiki aldıkları araba sayısı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Bayi Numarası	Bayilerin Şimdiye Kadar Olan Toplam Araba Satışları	Şimdiki Yıllık Araba Kontenjanı
1	5700	1600
2	5000	1550
3	4500	1500
4	6000	1610
5	5200	1530
6	5650	1420

Önce bayilerin verimlilik katsayıları alan α_i leri belirleyelim.

En çok satan firma dört numaralı firma olduğu için diğer bayilerin toplam satışları dört numaralı bayinin toplam satışına bölünerek her bayinin verimlilik katsayısı belirleniyor.

$$\alpha_1 = \frac{5700}{6000} = 0{,}95 \quad \alpha_2 = \frac{5000}{6000} = 0{,}83 \quad \alpha_3 = \frac{4500}{6000} = 0{,}75$$

$$\alpha_4 = \frac{6000}{6000} = 1 \quad \alpha_5 = \frac{5200}{6000} = 0{,}87 \quad \alpha_6 = \frac{5650}{6000} = 0{,}94$$

Problemin birinci tip modele göre çözümü

En büyükleme

$$\text{Max } W = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0{,}95X_1 + 0{,}83X_2 + 0{,}75X_3 + X_4 + 0{,}87X_5 + 0{,}94X_6$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \leq 400$$

$$X_1 \leq 100 \quad (1700 - 1600 = 100)$$

$$X_2 \leq 150 \quad (1700 - 1550 = 150)$$

$$X_3 \leq 200 \quad (1700 - 1500 = 200)$$

$$X_4 \leq 90 \quad (1700 - 1610 = 90)$$

$$X_5 \leq 170 \quad (1700 - 1530 = 170)$$

$$X_6 \leq 280 \quad (1700 - 1420 = 280)$$

Şimdi simplex tablosunu kuralım:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}		
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	400	X_7
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	100	X_8
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	150	X_9
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	200	X_{10}
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	90	X_{11}
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	170	X_{12}
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	280	X_{13}
-0,95	-0,83	-0,75	-1	-0,87	-0,94	0	0	0	0	0	0	0	0	z

Şekil 2: Uygulamadaki Problemin Simplex Tablosu

Simplex Metodun son çözüm tablosu aşağıdadır.

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}		
0	1	1	1	1	1	1	-1	0	0	-1	0	-1	400	X_7
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	100	X_8
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	150	X_9
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	200	X_{10}
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	90	X_{11}
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	170	X_{12}
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	70	X_{13}
0	0,11	0,19	0	-0,07	0	0	0,95	0	0	1	0	0,94	382,4=z	

Şekil 3: Uygulamadaki Problemin Çözümünü Veren son Simplex Tablo

Elde edilen neticeye göre $X_6 = 210$ $X_1 = 100$ $X_4 = 90$ fazla araba almaya hak kazanırken, diğerleri eski rakamlarında kalıyorlar yani hiç artış elde edemiyorlar.

Müşteri No	Başarı Katsayısı	Artıştan Evvel Araba Sayısı	Artış
1	0.95	1600	100
2	0.83	1550	0
3	0.75	1500	0
4	1	1610	90
5	0.87	1530	0
6	0.94	1420	210

Yukarıdaki tablo incelendiğinde en fazla artışı hem başarı katsayısı yüksek hem de evvelce mağduriyete uğramış 6 numaralı bayi alıyor. Diğer artışları başarı katsayıları yüksek olan 1 ve 4 numaraları müşteriler paylaşıyor. Demekki metot amacına ulaşıyor. Fakat moral yönünden bazı bayilerin hiç tahsisat alamamaları mahsurlu görülürse, ikinci tip programlamaya geçilir.

İkinci Tip Programlama

$$X_1 \geq \frac{P.A}{100.n} = \frac{400.21}{100.6} > 14$$

En büyükleme $W = 0{,}95X_1 + 0{,}83X_2 + 0{,}75X_3 + X_4 + 0{,}87X_5 + 0{,}94X_6$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \leq 400$$

$X_1 \leq 100 \quad X_1 \geq 14$

$X_2 \leq 150 \quad X_2 \geq 14$

$X_3 \leq 200 \quad X_3 \geq 14$

$X_4 \leq 90 \quad X_4 \geq 14$

$X_5 \leq 170 \quad X_5 \geq 14$

$X_6 \leq 280 \quad X_6 \geq 14$

Yukarıda arabaların yüzde 21'i bayiler arasında eşit bölüştürülüyor, diğer yüzde 79 başarı esasına göre dağıtılıyor.

Yukarıda formülasyonda 12 kısıt görülüyor, burada değişken değişimi yaparak kısıt sayısını yediye indirerek, problemi sadece küçük veya eşittir (≤ 0) tipi kısıtlar ihtiva eden hale sokacağız çünkü böylece simplex metodunu daha basit kullanabileceğiz.

$X_1 = Z_1 + 14$

$X_2 = Z_2 + 14$

$X_3 = Z_3 + 14$

$X_4 = Z_4 + 14$

$X_5 = Z_5 + 14$

$X_6 = Z_6 + 14$

$$\text{Max} : W = 0{,}95Z_1 + 0{,}83Z_2 + 0{,}75Z_3 + Z_4 + 0{,}87Z_5 + 0{,}94Z_6 + 74{,}76$$

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5 + Z_6 \leq 316$$

$$Z_1 \leq 86$$

$$Z_2 \leq 136$$

$$Z_3 \leq 184$$

$$Z_4 \leq 76$$

$$Z_5 \leq 156$$

$$Z_6 \leq 256$$

$$Z_i \leq 0$$

Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8	Z_9	Z_{10}	Z_{11}	Z_{12}	Z_{13}		
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	316	Z_7
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	86	Z_8
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	136	Z_9
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	184	Z_{10}
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	76	Z_{11}
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	156	Z_{12}
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	256	Z_{13}
-0,95	-0,83	-0,75	-1	-0,87	-0,94	0	0	0	0	0	0	0	0	z

Şekil 4: Koşullu Dağıtım için ilk simplex tablosu

Yukarıdaki simplex tablosunun son çözüm tablosu aşağıdadır.

Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8	Z_9	Z_{10}	Z_{11}	Z_{12}	Z_{13}		
0	1	1	1	1	1	1	-1	0	0	-1	0	-1	154	Z_6
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	86	Z_1
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	136	Z_9
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	184	Z_{10}
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	76	Z_4
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	156	Z_{12}
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	112	Z_{13}
0	0,11	0,19	0	0,07	0	0,94	0,01	0	0	0,06	0	0	377,84=z	

Şekil 5 : Koşullu dağıtım içn optimum sonuç ve simplex tablosu

Z değerlerinden tekrar X değerlerini elde ederek aşağıdaki son durum ortaya çıkar.

Müşteri No	Başarı Katsayısı	Artıştan Evvel Araba Sayısı	Artış	Tavana Vardı mı?
1	0.95	1600	100	Evet
2	0.83	1550	14	Hayır
3	0.75	1500	14	Hayır
4	1	1610	90	Evet
5	0.87	1530	14	Hayır
6	0.97	1420	168	Hayır

Şekil 6 : Koşullu dağıtımın son şekli

SONUÇ

Payların başarı esasına göre dağıtımı için geliştirilen matematik model önce en başarılı olana hak tanıyor, daha sonra ikinci sırada başarılı olana hak tanıyarak devam ediyor. Eğer bir üst sınır koyulmaz ise bütün payı en başarılı olan alıyor. Netice olarak uygun bir üst sınır ve uygun bir başarı ölçme veya verimlilik ölçme katsayısı ile yukarıdaki geliştirilen metod şirket menfaatlarını en üst çıkararak payların dağıtımını gerçekleştiriyor.

Şimdi problemin her iki programlamaya göre elde edilen çözümlerini karşılatıralım.

Bayi	Şimdiye Kadar gerçekleştirilen satış	Başarı Katsayısı	Yüzdelikten Önce Artış	Yüzdelikten Sonra Artış
1	5700	0.95	100	100
2	5000	0.83	0	14
3	4500	0.75	0	14
4	6000	1	90	90
5	5200	0.87	0	14
6	5650	0.94	210	168

Şekil 7 : Uygulamadaki Problemin 2 Farklı Çözümünün Karşılaştırılması

Son iki kolan karşılaştırıldığında görülüyor ki, birinci programlamada en büyük payı alan 6 numaralı bayinin payı 210 dan 168 e düşerek, neticede 42 adet azalmıştır. Bu azalış birinci programlamaya göre hiç artış alamıyan 2, 3 ve 5 numaralı bayilere 14 er adet artış olarak yansımıştır.

Eğer risk faktörü gözönüne alınırsa ikinci tip programlama şirket menfaatine daha uygun olur, çünkü en fazla artışı alan altı numaralı bayi, bu arabaları satamayabilir.

Fakat biz bu modeli ücret artışı problemine tatbik etseydik, en fazla artışı alan memurun, bu nakedişinde iki neden olurdu : Başarısı ve ücretinin diğerlerinden farklı şeklinde geride olması. Eğer ücret artışı problemin ikinci tip programlama ile çözersek en az ücret alan elemanın değerlerine yetişmesini önlemiş oluruz.

Netice olarak bu makalede payların başarı esasına göre dağıtımında iki tip programlama önerildi. Her ikisinin birbirine göre avantaj ve dezavantajları bulunuyor, fakat A yüzdesini uygun belirleyerek, ve şirket amaç ve politikalarını göz önüne alarak payların esasına göre dağıtımı problemi geliştirilen model ile belirlenen iki tip programlamadan birisi seçilerek başarı ile çözülebiliyor.

KAYNAKLAR

1- Linear Programming G.Hadley
2- Mathematics with Applications Lial - Miller
3- Mathematics For Business and Economics Robert H.Nicholson