2. SİMETRİK GRUPLAR

Sorular ve Çözümleri

1) Aşağıdaki permütasyonları ayrık devirlerin çarpımı olarak yazınız.

i) $\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 \\ 2\ 1\ 5\ 4\ 6\ 7\ 3 \end{pmatrix}$ **ii)** $\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 \\ 3\ 1\ 2\ 5\ 7\ 4\ 6 \end{pmatrix}$

Çözüm:

i) $\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 \\ 2\ 1\ 5\ 4\ 6\ 7\ 3 \end{pmatrix} = (12)(3567)(4)$

ii) $\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 \\ 3\ 1\ 2\ 5\ 7\ 4\ 6 \end{pmatrix} = (132)(4576)$

2) Aşağıdaki permütasyonları ayrık devirlerin çarpımı olarak yazınız.

i) (1234)(253) **ii)** (123456)(3456)

Çözüm:

i) $(1234)(253) = (1254)(3)$

ii) $(123456)(3456) = (1235)(46)$

3) $a = (137)(2578) \in S_{10}$ ise a^{-1} yi bulunuz.

Çözüm :

$b = (137)$ ve $c = (2578)$ olsun. Şu halde $a = bc$ ve böylece $a^{-1} = c^{-1}b^{-1}$ dir. Sonuç olarak $a^{-1} = (8752)(731)$ dir.

4) $\alpha = (1257)$ ve $\beta = (246) \in S_7$ ise $\alpha\beta\alpha^{-1}$ yi bulunuz.

Çözüm:

$\alpha\beta\alpha^{-1} = \alpha(246)\alpha^{-1} = \big(\alpha(2)\alpha(4)\alpha(6)\big) = (546).$

5) $\alpha = (1357)$ ve $\beta = (248)(136) \in S_8$ ise $\alpha\beta\alpha^{-1}$ yi bulunuz.

Çözüm:

$\alpha\beta\alpha^{-1} = \alpha(248)(136)\alpha^{-1} = \big(\alpha(2)\alpha(4)\alpha(8)\big)\big(\alpha(1)\alpha(3)\alpha(6)\big) = (248)(356).$

6) $(1\ 2 \ldots n-1\ n)^{-1} = (n\ \ n-1 \ldots 2\ 1)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\alpha = (1\ 2 \ldots n-1\ n), \beta = (n\ n-1 \ldots 2\ 1)$ olmak üzere $\alpha\beta = (1\ 2 \ldots n-1\ n)(n\ n-1 \ldots 2\ 1) = (1) = I$ ve $\beta\alpha = (n\ n-1 \ldots 2\ 1)(1\ 2 \ldots n-1\ n) = I$ sağlandığından $\alpha^{-1} = \beta$ dır.

7) a) $f = (1234),\ g = (12)(34)$ ise fgf^{-1} yi belirleyiniz.

b) $f = (13),\ \ g = (132)(24)$ ise fgf^{-1} yi belirleyiniz.

Çözüm: Önerme: $\sigma \in S_n$ için $\sigma(i_1, i_2, \ldots, i_r)\sigma^{-1} = \big(\sigma(i_1)\ \sigma(i_2) \ldots \sigma(i_r)\big)$ dir.
Yukarıdaki önermeye göre;

a. $fgf^{-1} = f(1\ 2)(3\ 4)f^{-1} = (f(1\ 2)f^{-1})(f(3\ 4)f^{-1})$
$$= \big(f(1)\ f(2)\big)\big(\ f(3)\ f(4)\big) = (\ 2\ 3\ )(\ 4\ 1)$$

b. $fgf^{-1} = f(1\ 32)(2\ 4)f^{-1} = f(1\ 324)f^{-1}$
$$= (\ f(1)\ f(3)\ f(2)\ f(4)) = (\ 3\ 1\ 2\ 4\ )$$

8) Aşağıdaki permütasyonların mertebesini bulunuz.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Çözüm: a. Verilen permütasyonu ayrık devirlerin çarpımı olarak yazalım: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 34 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 54 & 6 & 3 \end{pmatrix} = (\ 1\ 2\ )(\ 3\ 5\ 6\ )$ dır. Mertebesi $ekok(2,3) = 6$ dır.

b. Benzer şekilde, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 34 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 34 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (\ 1\ 2\ )(\ 5\ 6\ )$ ve mertebesi $ekok(2,2) = 2$ olarak bulunur.

9) Her transpozisyonun tersi kendisine eşit olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Herhangi bir transpozisyon $(i_1 i_2)$ için $(i_1 i_2)(i_2 i_1) = I$ ve $(i_2 i_1)(i_1 i_2) = I$ olduğundan $(i_1 i_2)^{-1} = (i_1 i_2)$ dir.

10) S_9 da kaç tane 4-lü devir vardır?

Çözüm. S_9 da 4-lü bir devir, $\{1,2,\ldots,9\}$ kümesinden 4 tane elemanın seçilmesi ile elde edilir. Sıralama olarak (1234)=(2341) olduğundan, dairesel permütasyon geçerlidir. O halde 4 lü devir sayısı $\binom{9}{4}(4-1)!$ olarak bulunur.

11) $a = (12)(368)(4578) \in S_9$ un tek veya çift permütasyon olup olmadığına karar veriniz.

Çözüm. $a = (12)(38)(36)(48)(47)(45)$ olduğundan altı tane 2-li devirin çarpımıdır. Böylece a çift permütasyondur.

12) $\alpha, \beta \in S_n$ olsun. β çift permütasyon ise $\alpha\beta\alpha^{-1}$ de çift, β tek permütasyon ise $\alpha\beta\alpha^{-1}$ de tektir. İspatlayınız.

Çözüm. $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ bir n-li devir olsun. $\alpha\beta\alpha^{-1} = (\alpha(\beta_1), \dots, \alpha(\beta_n))$ olduğundan $\alpha\beta\alpha^{-1}$ de bir n-li devirdir. Şu halde β çift permütasyon ise $\alpha\beta\alpha^{-1}$ de çift, β tek permütasyon ise $\alpha\beta\alpha^{-1}$ de tektir.

13) A_4 kümesinin elemanlarını yazınız. A_4 ün eleman sayısını belirleyiniz ve S_4 grubunun eleman sayısı ile arasındaki ilişkiyi inceleyiniz.

Çözüm.A_4 nin elemanları S_4 teki elemanlardan çift permütasyonlarının kümesidir.

$$A_4 = \{I, (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

Kümesinden görüldüğü gibi eleman sayısı 12 olup S_4 grubunun eleman sayısının yarısıdır.

14) S sonlu küme olmak üzere S den S ye bir fonksiyonun bire-bir olması için gerek yeter koşulun bu fonksiyonun örten olmasıdır. Gösteriniz. S sonsuz küme ise doğru mudur ?

Çözüm. S , n elemanlı sonlu bir küme olsun. $f: S \to S$ bir 1-1 bir fonksiyon olsun. O halde $f(S)$ görüntü kümesinin eleman sayısı da n dir. $f(S) \subseteq S$ olduğundan $f(S) = S$, yani f bir örten fonksiyondur.

Tersine, $f: S \to S$ bir örten bir fonksiyon olsun. Eğer $a, b \in S$ için $a \neq b$ iken $f(a) = f(b)$ olsaydı $|f(S)| \leq n - 1$ olur ve bu da f nin örtenliği ile çelişirdi. O halde her $a \neq b$ için $f(a) \neq f(b)$ yani f birebirdir.

S sonsuz küme ise bu gerektirme doğru değildir. Örneğin $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x$ foksiyonu 1-1 ancak örten değildir. $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 2x + 3, & x \leq 0 \end{cases}$

foksiyonu örten ancak $g(1) = 1 = g(-1)$ olduğundan 1-1 değildir.

15) Bir dikdörtgenin köşe noktaları üzeride tanımlı bütün dönme ve simetri fonksiyonlarının bileşke işlemine göre grup olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$$\begin{array}{|cc|} \hline 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Bir dikdörtgenin köşelerini yandaki biçimde numaralayalım. Dikdörtgenin her bir simetrisi veya dönmesi D_4 grubunun bir permütasyonuna karşılık gelecektir. Bunu aşağıdaki gibi görebiliriz:

d_0 : 0° lik dönme (ilk konum)
$d_0 = \imath$

$$\begin{array}{|cc|} \hline 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ \hline \end{array} \longmapsto \begin{array}{|cc|} \hline 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ \hline \end{array}$$

d_1 : 90° lik dönme (saat yönünün tersine)
$d_1 = (1\ 2\ 3\ 4)$

$$\begin{array}{|cc|} \hline 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ \hline \end{array} \longmapsto \begin{array}{|cc|} \hline 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

d_2 : 180° lik dönme
$d_2 = (1\ 3)(2\ 4)$

$$\begin{array}{|cc|} \hline 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ \hline \end{array} \longmapsto \begin{array}{|cc|} \hline 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

d_3 : 270° lik dönme
$d_3 = (1\ 4\ 3\ 2)$

$$\begin{array}{|cc|} \hline 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ \hline \end{array} \longmapsto \begin{array}{|cc|} \hline 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

t_1 : Yatay eksen etrafında 180° lik dönme
$t_1 = (1\ 2)(3\ 4)$

$$\begin{array}{|cc|} \hline 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ \hline \end{array} \longmapsto \begin{array}{|cc|} \hline 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ \hline \end{array}$$

t_2 : Düşey eksen etrafında 180° lik dönme
$t_2 = (1\ 4)(2\ 3)$

$$\begin{array}{|cc|} \hline 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ \hline \end{array} \longmapsto \begin{array}{|cc|} \hline 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ \hline \end{array}$$

k_1 : 1 - 3 köşegeni etrafında 180° lik dönme
$k_1 = (2\ 4)$

$$\begin{array}{|cc|} \hline 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ \hline \end{array} \longmapsto \begin{array}{|cc|} \hline 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

k_2 : 2 - 4 köşegeni etrafında 180° lik dönme
$k_2 = (1\ 3)$

$$\begin{array}{|cc|} \hline 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ \hline \end{array} \longmapsto \begin{array}{|cc|} \hline 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Görüldüğü gibi D_4, 8 elemandan meydana gelir. İki eleman arasındaki işlem ise permütasyonlardaki bileşke işlemidir. Örneğin,

$$d_1t_1: \quad \boxed{\begin{matrix}3 & 2\\ 4 & 1\end{matrix}} \xrightarrow{t_1} \boxed{\begin{matrix}4 & 1\\ 3 & 2\end{matrix}} \xrightarrow{d_1} \boxed{\begin{matrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{matrix}} \quad ; \quad d_1t_1 = k_2,$$

$$t_1d_1: \quad \boxed{\begin{matrix}3 & 2\\ 4 & 1\end{matrix}} \xrightarrow{d_1} \boxed{\begin{matrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{matrix}} \xrightarrow{t_1} \boxed{\begin{matrix}3 & 4\\ 2 & 1\end{matrix}} \quad ; \quad t_1d_1 = k_1,$$

Bu işlemler altında D_4 grubunun işlem tablosu aşağıdaki gibi elde edilir:

	d_0	d_1	d_2	d_3	t_1	t_2	k_1	k_2
d_0	d_0	d_1	d_2	d_3	t_1	t_2	k_1	k_2
d_1	d_1	d_2	d_3	d_0	k_2	k_1	t_1	t_2
d_2	d_2	d_3	d_0	d_1	t_2	t_1	k_2	k_1
d_3	d_3	d_0	d_1	d_2	k_1	k_2	t_2	t_1
t_1	t_1	k_1	t_2	k_2	d_0	d_2	d_1	d_3
t_2	t_2	k_2	t_1	k_1	d_2	d_0	d_3	d_1
k_1	k_1	t_2	k_2	t_1	d_3	d_1	d_0	d_2
k_2	k_2	t_1	k_1	t_2	d_1	d_3	d_2	d_0