

## 2. SİMETRİK GRUPLAR

### Sorular ve Çözümleri

1) Aşağıdaki permütasyonları ayrık devirlerin çarpımı olarak yazınız.

$$\text{i)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{ii)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

### Çözüm:

$$\text{i)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix} = (12)(3567)(4)$$

$$\text{ii)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} = (132)(4576)$$

2) Aşağıdaki permütasyonları ayrık devirlerin çarpımı olarak yazınız.

$$\text{i)} (1234)(253)$$

$$\text{ii)} (123456)(3456)$$

### Çözüm:

$$\text{i)} (1234)(253) = (1254)(3)$$

$$\text{ii)} (123456)(3456) = (1235)(46)$$

3)  $\alpha = (137)(2578) \in S_{10}$  ise  $\alpha^{-1}$  yi bulunuz.

### Çözüm :

$b = (137)$  ve  $c = (2578)$  olsun. Şu halde  $a = bc$  ve böylece  $a^{-1} = c^{-1}b^{-1}$  dir. Sonuç olarak  $a^{-1} = (8752)(731)$  dir.

4)  $\alpha = (1257)$  ve  $\beta = (246) \in S_7$  ise  $\alpha\beta\alpha^{-1}$  yi bulunuz.

### Çözüm:

$$\alpha\beta\alpha^{-1} = \alpha(246)\alpha^{-1} = (\alpha(2)\alpha(4)\alpha(6)) = (546).$$

5)  $\alpha = (1357)$  ve  $\beta = (248)(136) \in S_8$  ise  $\alpha\beta\alpha^{-1}$  yi bulunuz.

### Çözüm:

$$\alpha\beta\alpha^{-1} = \alpha(248)(136)\alpha^{-1} = (\alpha(2)\alpha(4)\alpha(8))(\alpha(1)\alpha(3)\alpha(6)) = (248)(356).$$

6)  $(1\ 2\ \dots\ n-1\ n)^{-1} = (n\ n-1\ \dots\ 2\ 1)$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**  $\alpha = (1\ 2\ \dots\ n-1\ n), \beta = (n\ n-1\ \dots\ 2\ 1)$  olmak üzere  $\alpha\beta = (1\ 2\ \dots\ n-1\ n)(n\ n-1\ \dots\ 2\ 1) = (1) = I$  ve  $\beta\alpha = (n\ n-1\ \dots\ 2\ 1)(1\ 2\ \dots\ n-1\ n) = I$  sağlandığından  $\alpha^{-1} = \beta$  dir.

7) a)  $f = (1234), g = (12)(34)$  ise  $f g f^{-1}$  yi belirleyiniz.

b)  $f = (13), g = (132)(24)$  ise  $f g f^{-1}$  yi belirleyiniz.

**Çözüm:** Önerme:  $\sigma \in S_n$  için  $\sigma(i_1, i_2, \dots, i_r)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\ \sigma(i_2)\ \dots\ \sigma(i_r))$  dir.

Yukarıdaki önermeye göre;

$$\begin{aligned} \text{a. } f g f^{-1} &= f(1\ 2)(3\ 4)f^{-1} = (f(1\ 2)f^{-1})(f(3\ 4)f^{-1}) \\ &= (f(1)\ f(2))(f(3)\ f(4)) = (2\ 3)(4\ 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } f g f^{-1} &= f(1\ 32)(2\ 4)f^{-1} = f(1\ 324)f^{-1} \\ &= (f(1)\ f(3)\ f(2)\ f(4)) = (3\ 1\ 2\ 4) \end{aligned}$$

8) Aşağıdaki permütasyonların mertebesini bulunuz.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

**Çözüm:** a. Verilen permütasyonu ayrık devirlerin çarpımı olarak yazalım:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2)(3\ 5\ 6)$  dir. Mertebesi  $ekok(2,3) = 6$  dir.

b. Benzer şekilde,  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (1\ 2)(5\ 6)$  ve mertebesi  $ekok(2,2) = 2$  olarak bulunur.

9) Her transpozisyonun tersi kendisine eşit olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:** Herhangi bir transpozisyon  $(i_1\ i_2)$  için  $(i_1\ i_2)(i_2\ i_1) = I$  ve  $(i_2\ i_1)(i_1\ i_2) = I$  olduğundan  $(i_1\ i_2)^{-1} = (i_1\ i_2)$  dir.

10)  $S_9$  da kaç tane 4-lü devir vardır?

**Çözüm.**  $S_9$  da 4-lü bir devir,  $\{1,2, \dots, 9\}$  kümesinden 4 tane elemanın seçilmesi ile elde edilir. Sıralama olarak  $(1234)=(2341)$  olduğundan, dairesel permütasyon geçerlidir. O halde 4 lü devir sayısı  $\binom{9}{4}(4-1)!$  olarak bulunur.

11)  $a = (12)(368)(4578) \in S_9$  un tek veya çift permütasyon olup olmadığına karar veriniz.

**Çözüm.**  $a = (12)(38)(36)(48)(47)(45)$  olduğundan altı tane 2-li devirin çarpımıdır. Böylece  $a$  çift permütasyondur.

12)  $\alpha, \beta \in S_n$  olsun.  $\beta$  çift permütasyon ise  $\alpha\beta\alpha^{-1}$  de çift,  $\beta$  tek permütasyon ise  $\alpha\beta\alpha^{-1}$  de tektir. İspatlayınız.

**Çözüm.**  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  bir  $n$ -li devir olsun.  $\alpha\beta\alpha^{-1} = (\alpha(\beta_1), \dots, \alpha(\beta_n))$  olduğundan  $\alpha\beta\alpha^{-1}$  de bir  $n$ -li devirdir. Şu halde  $\beta$  çift permütasyon ise  $\alpha\beta\alpha^{-1}$  de çift,  $\beta$  tek permütasyon ise  $\alpha\beta\alpha^{-1}$  de tektir.

13)  $A_4$  kümesinin elemanlarını yazınız.  $A_4$  ün eleman sayısını belirleyiniz ve  $S_4$  grubunun eleman sayısı ile arasındaki ilişkiyi inceleyiniz.

**Çözüm.**  $A_4$  nin elemanları  $S_4$  teki elemanlardan çift permütasyonlarının kümesidir.

$$A_4 = \{I, (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

Kümesinden görüldüğü gibi eleman sayısı 12 olup  $S_4$  grubunun eleman sayısının yarısıdır.

14)  $S$  sonlu küme olmak üzere  $S$  den  $S$  ye bir fonksiyonun bire-bir olması için gerek yeter koşulun bu fonksiyonun örten olmasıdır. Gösteriniz.  $S$  sonsuz küme ise doğru mudur ?

**Çözüm.**  $S$ ,  $n$  elemanlı sonlu bir küme olsun.  $f: S \rightarrow S$  bir 1-1 bir fonksiyon olsun. O halde  $f(S)$  görüntü kümesinin eleman sayısı da  $n$  dir.  $f(S) \subseteq S$  olduğundan  $f(S) = S$ , yani  $f$  bir örten fonksiyondur.

Tersine,  $f: S \rightarrow S$  bir örten bir fonksiyon olsun. Eğer  $a, b \in S$  için  $a \neq b$  iken  $f(a) = f(b)$  olsaydı  $|f(S)| \leq n - 1$  olur ve bu da  $f$  nin örtenliği ile çelişirdi. O halde her  $a \neq b$  için  $f(a) \neq f(b)$  yani  $f$  birebirdir.

$S$  sonsuz küme ise bu gerektirme doğru değildir. Örneğin  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $f(x) = 2x$  foksiyonu

$$1-1 \text{ ancak örten değildir. } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 2x + 3, & x \leq 0 \end{cases}$$

foksiyonu örten ancak  $g(1) = 1 = g(-1)$  olduğundan 1-1 değildir.

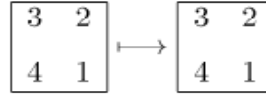
15) Bir dikdörtgenin köşe noktaları üzerinde tanımlı bütün dönme ve simetri fonksiyonlarının bileşke işlemine göre grup olduğunu gösteriniz.

**Çözüm.**

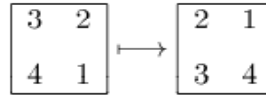


Bir dikdörtgenin köşelerini yandaki biçimde numaralayalım. Dikdörtgenin her bir simetrisi veya dönmesi  $D_4$  grubunun bir permütasyonuna karşılık gelecektir. Bunu aşağıdaki gibi görebiliriz:

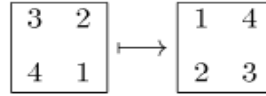
$d_0 : 0^\circ$  lik dönme (ilk konum)  
 $d_0 = 1$



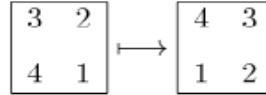
$d_1 : 90^\circ$  lik dönme (saat yönünün tersine)  
 $d_1 = (1\ 2\ 3\ 4)$



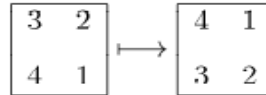
$d_2 : 180^\circ$  lik dönme  
 $d_2 = (1\ 3)(2\ 4)$



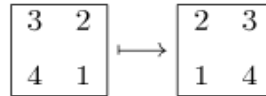
$d_3 : 270^\circ$  lik dönme  
 $d_3 = (1\ 4\ 3\ 2)$



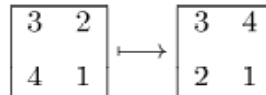
$t_1 : Yatay$  eksen etrafında  $180^\circ$  lik dönme  
 $t_1 = (1\ 2)(3\ 4)$



$t_2 : Düşey$  eksen etrafında  $180^\circ$  lik dönme  
 $t_2 = (1\ 4)(2\ 3)$



$k_1 : 1 - 3$  köşegeni etrafında  $180^\circ$  lik dönme  
 $k_1 = (2\ 4)$



$k_2 : 2 - 4$  köşegeni etrafında  $180^\circ$  lik dönme  
 $k_2 = (1\ 3)$



Görüldüğü gibi  $D_4$ , 8 elemandan meydana gelir. İki eleman arasındaki işlem ise permütasyonlardaki bileşke işlemidir. Örneğin,

$$d_1 t_1 : \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 4 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{t_1} \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 1 \\ \hline 3 & 2 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{d_1} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 \\ \hline \end{array} ; \quad d_1 t_1 = k_2,$$

$$t_1 d_1 : \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 4 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{d_1} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{t_1} \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array} ; \quad t_1 d_1 = k_1,$$

Bu işlemler altında  $D_4$  grubunun işlem tablosu aşağıdaki gibi elde edilir:

	$d_0$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$t_1$	$t_2$	$k_1$	$k_2$
$d_0$	$d_0$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$t_1$	$t_2$	$k_1$	$k_2$
$d_1$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_0$	$k_2$	$k_1$	$t_1$	$t_2$
$d_2$	$d_2$	$d_3$	$d_0$	$d_1$	$t_2$	$t_1$	$k_2$	$k_1$
$d_3$	$d_3$	$d_0$	$d_1$	$d_2$	$k_1$	$k_2$	$t_2$	$t_1$
$t_1$	$t_1$	$k_1$	$t_2$	$k_2$	$d_0$	$d_2$	$d_1$	$d_3$
$t_2$	$t_2$	$k_2$	$t_1$	$k_1$	$d_2$	$d_0$	$d_3$	$d_1$
$k_1$	$k_1$	$t_2$	$k_2$	$t_1$	$d_3$	$d_1$	$d_0$	$d_2$
$k_2$	$k_2$	$t_1$	$k_1$	$t_2$	$d_1$	$d_3$	$d_2$	$d_0$