9. İZOMORFİZMA TEOREMLERİ VE EŞLENİK ELEMANLAR

Aşağıdaki teorem **Homomorfizma teoremi** olarak da bilinir.

Teoremi 9.1$(\mathbf{1}.\,\boldsymbol{İzomorfizma\,Teoremi})$. $f: G \to H$ bir grup homomorfizması olsun. Şu halde $G/Çekf \cong f(G)$ dir. Özel olarak, f örten ise $G/Çekf \cong H$ dır.

İspat. $K = Çekf$ olmak üzere $\varphi: G/K \to f(G)$ dönüşümünü $\varphi(xK) = f(x)$ ile tanımlayalım. Herhangi $x, y \in G$ için

$$xK = yK \Leftrightarrow y^{-1}x \in K \Leftrightarrow f(y^{-1}x) = e_H \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

olduğundan φ iyi tanımlı ve bire-bir dir. Ayrıca,

$$\varphi\big((xK)(yK)\big) = \varphi(xyK) = f(xy) = f(x)f(y) = \varphi(xK)\varphi(yK)$$

olduğundan φ homomorfizmadır. Böylece φ örten olduğundan $G/Çekf \cong f(G)$ elde ederiz.

Örnekler 9.2 :

a) $Z/nZ \cong Z_n$ $(n \geq 2)$ dir.

Çözüm. $f: Z \to Z_n$ **,** $f(x) = \bar{x}$ olmak üzere f örten bir homomorfizmadır. Ayrıca,

$$Çek\, f = \{x \in Z : f(x) = \bar{x} = \bar{0}\} = nZ$$

olduğundan 1.izomorfizma teoreminden $Z/nZ \cong Z_n$ $(n \geq 2)$ dir.

b) $Z \times Z/\langle(1,1)\rangle \cong Z$ dir.

Çözüm. $f: Z \times Z \to Z$ fonksiyonunu $f\big((x, y)\big) = x - y$ ile tanımlayalım. f nin örten olduğu açıktır. Ayrıca $\forall$ (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in Z \times Z$ için

$$\begin{aligned} f\big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big) &= f\big((x_1 + x_2, y_1 + y_2)\big) = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) \\ &= (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) = f\big((x_1, y_1)\big) + f\big((x_2, y_2)\big) \end{aligned}$$

olduğundan f homomorfizma dır ve

$$Çekf = \{(x, y): f(x, y) = x - y = 0\} = \{(x, x): x \in Z\} = \langle(1,1)\rangle$$

olduğundan 1. izomorfizma teoreminden $Z \times Z/\langle(1,1)\rangle \cong Z$ dir.

c) G_1 ve G_2 iki grup ve $N_1 \lhd G_1$ ve $N_2 \lhd G_2$ olsun. Şu halde

$$(G_1 \times G_2)/(N_1 \times N_2) \cong (G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$$

dir.

Çözüm. $\varphi((x_1, x_2)) = (x_1N_1, x_2N_2)$ ile tanımlı $\varphi: G_1 \times G_2 \to (G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Böylece φ örten homomorfizmadır ve $Çek\varphi = N_1 \times N_2$ dir. Bundan dolayı 1.İzomorfizma teoreminden $(G_1 \times G_2)/(N_1 \times N_2) \cong (G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$ elde ederiz.

Teorem 9.3 ***(2. İzomorfizma Teoremi).*** G bir grup, $H < G$ ve $N \lhd G$ olsun. Şu halde $H / H \cap N \cong HN / N$ dir.

İspat: İspatı adım adım yapalım**.**

1) $H \cap N \lhd H$: $\forall n \in H \cap N, \forall h \in H$ için $hnh^{-1} \in H \cap N$ olduğunu gösterelim. $hnh^{-1} \in H$ olduğu açıktır. $N \lhd G$ ve $h \in G$ olduğundan $hnh^{-1} \in N$ olur. Yani $hnh^{-1} \in H \cap N$ ve böylece $H \cap N \lhd H$ dir.

2) $HN < G$: $N \lhd G$ olduğundan $HN = NH$ ve böylece $HN < G$ dir .

3) $N \lhd HN$ olduğu açıktır.

Şimdi $f : H \to HN / N$ dönüşümü $\forall h \in H$ $f(h) = hN$ ile tanımlayalım.

4) f örtendir : $hnN \in HN / N$ verilsin. $hnN = hN = f(h)$ olup f örtendir.

5) f homomorfizmadır : $h_1, h_2 \in H$ olsun. $f(h_1h_2) = (h_1h_2)N = (h_1N)(h_2N) = f(h_1)f(h_2)$.

6) $Çekf = \{x \in H: f(x) = xN = N\} = H \cap N$ dir.

Böylece 1.İzomorfizma teoreminden $H / H \cap N \cong HN / N$ elde edilir.

Sonuç 9.4. G toplamsal bir grup ve $H < G$ ve $N \lhd G$ olsun. Şu halde $(H + N)/N \cong H/H \cap N$ dir.

Örnek 9.5. $G = Z_{40}$, $H = \langle 4 \rangle$, $N = \langle 10 \rangle$ olmak üzere $H + N = \langle 2 \rangle$ ve $H \cap N = \langle 20 \rangle$ dir. Böylece $(H + N)/N \cong \langle 4 \rangle/\langle 20 \rangle \cong Z_5$ elde ederiz.

Teorem 9.6 ***(3. İzomorfizma Teoremi).*** G bir grup ve $H \lhd G, K \lhd G$ olsun. Eğer $K \subseteq H$ ise $(G/K)/(H/K) \cong G/H$ dır.

İspat. $\varphi(xK) = xH$ ile tanımlı $\varphi: G/K \to G/H$ dönüşümünü göz önüne alalım. φ iyi tanımlıdır. Gerçekten, $xK = yK \Rightarrow x^{-1}y \in K \Rightarrow x^{-1}y \in H \Rightarrow xH = yH$ dır. Ayrıca $\forall x, y \in G$ için $\varphi\big((xK)(yK)\big) = \varphi(xyK) = xyH = (xH)(yH) = \varphi(xK)\varphi(yK)$ olduğundan φ bir homomorfizmadır. φ örten olduğundan ve $Çek\varphi = \{xK: xH = H\} = H/K$ dır. Böylece 1. İzomorfizma teoreminden $(G/K)/(H/K) \cong G/H$ dır.

Örnek 9.7. $G = Z$ olmak üzere $H = 2Z$ ve $K = 6Z$ olsun. O halde $G/H = Z/2Z$, $H/K = 2Z/6Z$, $G/K = Z/6Z$ olduğundan $(G/K)/(H/K) \cong G/H = Z/2Z \cong Z_2$ dir.

Önerme 9.8. $\forall\, a \in G$ için $\varphi(a) = l_a$ ile tanımlı $\varphi: G \to Inn(G)$ fonksiyonu bir homomorfizma ve $Çek\varphi = M(G)$ olup $G/M(G) \cong Inn(G)$ dir($M(G)$, G grubunun merkezi).

İspat. İç otomorfizmalar tanımından φ fonksiyonu örtendir. Ayrıca $\varphi(ab) = l_{ab} = l_a \circ l_b = \varphi(a)\circ\varphi(b)$ olduğundan φ bir homomorfizma dır. Şimdi φ fonksiyonunun çekirdeğini bulalım. $a \in Çek\varphi \Leftrightarrow \varphi(a) = l_a = l_e \Leftrightarrow \forall x \in G$ için $axa^{-1} = exe^{-1} = x \Leftrightarrow$ $\forall x \in G$ için $ax = xa \Leftrightarrow a \in M(G)$ dir. Böylece $Çek\varphi = M(G)$ olup 1.İzomorfizma teoreminden $G/M(G) \cong Inn(G)$ elde ederiz.

Tanım 9.9. G bir grup ve $a, b \in G$ olsun. Eğer $b = xax^{-1}$ olacak şekilde bir $x \in G$ varsa a ile b ***eşleniktir*** denir ve $a \approx b$ gösterilir.

Önerme 9.10 . $'\approx'$ eşlenik olma bağıntısı G de bir denklik bağıntısıdır.

İspat:
Yansıma: $\forall a \in G$ için $a = eae^{-1}$ olduğundan $a \approx a$ dir.
Simetri: $a \approx b \Rightarrow \exists x \in G, b = xax^{-1} \Rightarrow \exists x \in G, a = x^{-1}bx \Rightarrow b \approx a$
Geçişme: $a \approx b$ ve $b \approx c$ olsun.
$\exists x, y \in G, b = xax^{-1}$ ve $c = yby^{-1} \Rightarrow c = yxax^{-1}y^{-1}(yx)a(yx)^{-1} \Rightarrow a \approx c$

Tanım 9.11. G de $\approx$ denklik bağıntısının belirttiği denklik sınıflarına **eşlenik sınıfları** denir. $a \in G$ nin belirttiği **eşlenik sınıfı** $c(a) = \{x \in G : a \approx x\}$ ile gösterilir.

Not 9.12. Denklik sınıfları kümenin ayrışımını belirttiğinden G sonlu bir grup ise grubun mertebesi, eşlenik sınıflarındaki elemanların sayıları toplamıdır. $c(a)$ eşlenik sınıflarının eleman sayısı c_a ile gösterilir. $G = c(a_1) \cup c(a_2) \cup ... \cup c(a_k)$, G nin eşlenik sınıflarına ayrılışı olmak üzere $o(G) = c_{a_1} + c_{a_2} + ... + c_{a_k}$ dır.

Teorem 9.13. G sonlu bir grup ve $a \in G$ olsun. $M(a) < G$ ve $c_a = (G : M(a))$ dır. Şu halde $G = c(a_1) \cup c(a_2) \cup ... \cup c(a_k)$ ise $o(G) = \sum_{i=1}^{k} (G : M(a_i)) = \sum_{i=1}^{k} \frac{o(G)}{o(M(a_i))}$ dir.

İspat:
$a \in G$ olsun. $f : c(a) \to G / M(a),\ f(xax^{-1}) = xM(a)$ dönüşümünü tanımlayalım. f nin örten olduğu açıktır.
f **bire-birdir :** $\forall x, y \in G$ için
$f(xax^{-1}) = f(yay^{-1}) \Rightarrow xM(a) = yM(a) \Rightarrow y^{-1}x \in M(a) \Rightarrow y^{-1}xa = ay^{-1}x \Rightarrow xax^{-1} = yay^{-1}$
$\Rightarrow c_a = (G : M(a))$ dır.
Böylece $o(G) = \sum_{i=1}^{k} (G : M(a_i)) = \sum_{i=1}^{k} \frac{o(G)}{o(M(a_i))}$ dır.

Not 9.14. Bir eşlenik sınıfının tek bir elemandan ibaret olması için gerek ve yeter koşul o elemanın grubun merkezinde olmasıdır. Gerçekten, $a \in M(G) \Leftrightarrow \forall x \in G\ için\ ax = xa \Leftrightarrow \forall x \in G\ \ için\ xax^{-1} = a \Leftrightarrow c(a) = \{a\}$ dır. Şu halde eşlenik sınıf denklemi

$$o(G) = o(M) + \sum_{a \notin M} \big(G : M(a)\big)$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek 9.15. D_3 grubunun eşlenik sınıflarına ayırınız.
Çözüm. $c(e) = \{e\}$ olduğu açıktır. Ayrıca, $a^2 = bab^{-1}$ olduğundan $c(a) = \{a, a^2\}$ ve $aba^{-1} = ba\ \ ve\ a^2ba^{-2} = ba^2$ olduğundan $c(b) = \{b, ba, ba^2\}$ elde ederiz.

Örnek 9.16. S_4 grubunda (123) elemanının eşlenik sınıfını buluz.
Çözüm. (123) eşlenik sınıfında tüm 3-lü devirler bulunur. Böylece,
$c\big((123) = \{(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}\big)$ elde ederiz.

Örnek 9.17. S_3 grubunu eşlenik sınıflarına ayırınız.
Çözüm. $c(e) = \{e\}$ ve $c\big((12)\big) = \{(12), (23), (13)\},\ c\big((123)\big) = \{(123), (132)\}$ dir.

G bir grup ve $K \lhd G$ olsun Şu halde $\forall g \in G$ için $gKg^{-1} = K$ ve böylece K nın elemanlarının eşlenikleri yine K da olur. Tersine, alt grup olan eşlenik sınıflarının birleşiminin normal olacağı açıktır($Soru$ 16). Böylece aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 9.18. G bir grup ve $H < G$ olsun. O halde $H \lhd G$ olması için gerek yeter koşul H nin eşlenik sınıfları bir birleşimi olmasıdır.

Örnek 9.19. $D_3 = \{e, a, a^2, b, ba, ba^2\}$ olmak üzere Örnek 9.15 den D_3 grubunun eşlenik sınıfları $\{e\}$, $\{a, a^2\}, \{b, ba, ba^2\}$ olduğunu biliyoruz. Böylece Teorem 9.18 den D_3 grubunun herhangi bir K normal alt grubu bu eşlenik sınıflarının bir birleşimidir. Şimdi $e \in K$ olduğundan ve $|K|/|D_3| = 6$ olduğundan D_3 grubunun normal alt grupları sadece $\{e\}, \{e, a, a^2\}, D_3$ olur.

Teorem 9.18. Mertebesi bir asal tam sayının kuvveti olan bir sonlu grubun mertebesi birimden farklıdır.

İspat: p asal, $n \geq 1$ ve $o(G) = p^n$ olsun. $a \in G$ için $M(a) < G$ ve Lagrange teoremine göre, $o\big(M(a)\big) | o(G)$ olduğundan $0 \leq n_\alpha \leq n$ olmak üzere $o(M(a)) = p^{n_\alpha}$ dır.
$a \in M \Leftrightarrow M(a) = G \Leftrightarrow n_\alpha = n$ denklikleri göz önünde tutularak eşlenik sınıf denklemi yazılacak olursa, $o(G) = p^n = o\big(M(G)\big) + \sum_{n_\alpha < n} \frac{p^n}{p^{n_\alpha}} = o\big(M(G)\big) + \sum_{n_\alpha < n} p^{n - n_\alpha}$
bulunur. Bu eşitlikten $p | o\big(M(G)\big)$ elde edilir. Şu halde $o\big(M(G)\big) > 1$, yani $M(G)$ merkezinde birimden başka eleman da vardır.

Sonuç 9.19. p asal tamsayı olmak üzere, p^2 mertebeli grup değişmelidir.

İspat: G grubu değişmeli olması için gerek ve yeter koşul $M(G) = G$ olmasıdır. Teorem 9.18 den $o\big(M(G)\big) \neq 1$ ve $o\big(M(G)\big) | p^2$ olacağından $o\big(M(G)\big) = p$ veya $o\big(M(G)\big) = p^2$ olur. Eğer $o\big(M(G)\big) = p$ olmayacağını gösterirsek iddia ispatlanmış olur. $o\big(M(G)\big) = p$ ve $a \in G - M(G)$ olsun. Böylece $M(G) < M(a)$ ve $M(G) \neq M(a)$ olacağından, $o(M(a)) > p$ ve Lagrange teoreminden $o(M(a)) | p^2$ yani $o(M(a)) = p^2$ ve $M(a) = G$ bulunur. $M(a) = G \Leftrightarrow a \in M$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $o(M) = p$ olamaz.

Sorular.

1. $Z \times Z \times Z / \langle (1,1,1) \rangle \cong Z \times Z$ olduğunu gösteriniz.

2. $Z \times Z / \langle (0,1) \rangle \cong Z$ olduğunu gösteriniz.

3. $k, n \in N$ ve $k | n$ ise $Z_n / \langle \bar{k} \rangle \cong Z_k$ olduğunu gösteriniz.

4. $Inn(S_3) \cong S_3$ olduğunu gösteriniz.

5. H ve K iki grup ve $K_1 = \{(e_H, k) : k \in K\}$ ise aşağıdakileri ispatlayınız.

   a) $K_1 \lhd G$
   b) $K_1 \cong K$
   c) $G / K_1 \cong H$

6. $G = GL_n(\mathbb{R})$ ve $K = \{A : det(A) = 1\}$ olsun. O halde $K \lhd G$ ve $G/K \cong \mathbb{R}^*$ olduğunu gösteriniz.

7. $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0, b \neq 0 \right\}$ ve $K = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}$ olsun. O halde $K \lhd G$ ve $G/K \cong \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ olduğunu gösteriniz.

8. $\mathbb{R}^*/\{1, -1\} \cong \mathbb{R}^+$ olduğunu gösteriniz.

9. G değişmeli bir grup ve $K = \{(g, g, g): g \in G\}$ olsun. O halde $K \lhd G \times G \times G$ ve $(G \times G \times G)/K \cong G \times G$ dir. Gösteriniz.

10. $\alpha: G \to G_1$ bir grup homomorfizması ve $K \lhd G$ olsun. Eğer $Çek\alpha \subseteq K$ ise $\alpha(K) \lhd \alpha(G)$ olduğunu ve $\alpha(G)/\alpha(K) \cong G/K$ olduğunu gösteriniz.

11. G bir grup ve $n > 1$ olacak şekilde bir tam sayı olmak üzere $\forall a, b \in G$ için $(ab)^n = a^n b^n$ olsun. Eğer $G_n = \{a \in G: a^n = e\}$ ve $G^n = \{a^n: a \in G\}$ ise aşağıdakileri ispatlayınız.

a) $G_n \lhd G$
b) $G^n \lhd G$
c) $G/G_n \cong G^n$

12. G bir grup ve H ile K da birbirinden farklı normal alt grupları olsunlar. Şu halde $H \cap K$ nın H ve K gruplarının maksimal alt grupları olduğunu gösteriniz.

13. D_4 grubunu eşlenik sınıflarına ayırınız.

14. S_4 grubunu eşlenik sınıflarına ayırınız.

15. G bir grup ve $a, b \in G$ olsun. Şu halde ab ve ba elemanlarının eşlenik olduklarını ispatlayınız.

16. G grubunun bir H alt grubu G deki eşlenik sınıflarının bir birleşimi ise $H \lhd G$ olduğunu gösteriniz.

17. S_4 grubunun tüm normal alt gruplarını bulunuz.

18. D_4 grubunun tüm normal alt gruplarını bulunuz.