ÖDEV SORULARI

BÖLÜM 3: HOMOMORFİZMALAR

1) $f: R \to S$ bir örten homomorfizma olsun. Aşağıdakileri gösteriniz.
i) $f\big(M(R)\big) \subseteq M(S)$ dir.
ii) Eğer bir $a \in R$ nilpotent ise $f(a)$ da nilpotenttir.

2) $f: R \to S$ bir homomorfizma ve R nin karakteristiği, yani $char(R) > 0$ olsun. Bu durumda $char(f(R)) \leq char(R)$ olur, gösteriniz.

3) R değişmeli halka olmak üzere $f: R \to S$ bir örten homomorfizma ve I, J kümeleri R de idealler olsun. Aşağıdakileri gösteriniz.
i) $f(I + J) = f(I) + f(J)$ dir.
ii) $f(IJ) = f(I)f(J)$ dir.
iii) $f(I \cap J) \subseteq f(I) \cap f(J)$
iv) Ç$ek(f) \subseteq I$ veya Ç$ek(f) \subseteq J$ ise $f(I \cap J) = f(I) \cap f(J)$ dir.
v) $f(I: J) \subseteq (f(I): f(J))$
vi) Ç$ek(f) \subseteq I$ ise $f(I: J) = (f(I): f(J))$ dir.

4) R halkasının bir S alt halkasını ve bir I idealini alalım. $S \cap I = \{0_R\}$ ise S nin R/I nın bir alt halkasına izomorf olduğunu gösteriniz. (Yol Gösterme: $a \in S$ olmak üzere $f(a) = a + I$ fonksiyonundan yararlanabilirsiniz.)

5) $f: R \to R$ bir homomorfizma olmak üzere $S = \{a \in R: f(a) = a\}$ kümesi R nin bir alt halkasını oluşturur, gösteriniz.

6) I, R nin bir ideali olmak üzere $\forall a \in R$ için $\phi_I(a) = a + I$ olacak şekildeki $\phi_I: R \to R/I$ fonksiyonu ile doğal homomorfizmayı gösterelim. J ve K kümeleri $I \subseteq J$ ve $I \subseteq K$ olacak şekilde R nin iki alt halkası olsun. Bu durumda
i) $J \subseteq K$ olması için gerek ve koşul şart $\phi_I(J) \subseteq \phi_I(K)$ olmasıdır, gösteriniz.
ii) $\phi_I(J \cap K) = \phi_I(J) \cap \phi_I(K)$ dır, gösteriniz.

7) I, R nin bir ideali olmak üzere $M_n(R/I) \cong M_n(R)/M_n(I)$ olduğunu gösteriniz. (Yol Gösterme: $\forall (a_{ij}) \in M_n(R)$ olmak üzere $f\big((a_{ij})\big) = (a_{ij} + I)$ fonksiyonundan yararlanabilirsiniz.)

8) $f: R \to S$ bir örten homomorfizma olsun. $\{f^{-1}(b) \colon b \in S\}$ kümesi, $Çekf$ idealine göre denklik sınıflarıyla R nin bir parçalınışını oluşturur, gösteriniz. (Yol Gösterme: $b = f(a)$ ise denklik sınıfı $a + Çekf = f^{-1}(b)$ dır.)

9) I, J kümeleri R nin iki ideali olmak üzere $R = I \oplus J$ olsun. Bu durumda $R/I \cong J$ ve $R/J \cong I$ olur, gösteriniz.

10) $m|n$ olacak şekilde $n, m \in \mathbb{Z}^+$ ise $\mathbb{Z}_n \;/\; (m)/(n) \;\cong\; \mathbb{Z}_m$ olduğunu gösteriniz.