3. ALT GRUPLAR

SORULAR ve ÇÖZÜMLERİ

1) Tek tamsayılar kümesi T, çift tamsayılar kümesi C olsun. T ve C, $\mathbb{Z}$ nin birer alt grubu mudur? Neden?

Çözüm: T, $\mathbb{Z}$ nin bir alt grubu değildir. Çünkü $3,5 \in T$ için $5 - 3 = 2 \notin T$ dir. Fakat , C $\mathbb{Z}$ nin bir alt grubudur. Çünkü, her $2k, 2t \in C$ $(k, t \in \mathbb{Z})$ için $2k - 2t = 2(k - t) \in C$ dir.

2) $r, s \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $H = \{nr + ms : n, m \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin $\mathbb{Z}$ nin alt grubu olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $n_1 r + m_1 s, n_2 r + m_2 s \in H$ olsun. $n_1 r + m_1 s - n_2 r + m_2 s = (n_1 - n_2)r + (m_1 - m_2)s \in H$ olduğundan H, $\mathbb{Z}$ nin bir alt grubudur.

3) $\mathbb{C}$ kompleks sayılar grubunun $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ alt kümesinin $\mathbb{C}$ nin alt grubu olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $a + bi, c + di \in \mathbb{Z}[i]$ olsun. $a + bi - c + di = (a - c) + (b - d)i \in \mathbb{Z}[i]$ çünkü $a - c, b - d \in \mathbb{Z}$. Böylece $\mathbb{Z}[i]$ nin $\mathbb{C}$ nin bir alt grubu olduğu gösterilmiş olur.

4) $G = GL(2, R)$ ve $H = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a \text{ ve } b \text{ sıfırdan reel sayılar}\right\}$ ise $H < G$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in H$ için $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{bmatrix} \in H$ $(ac \neq 0 \; ve \; bc \neq 0)$ dir. Her $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in H$ matrisinin tersi, $\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix} \in H$ dir. $H < G$ olduğu gösterilmiş olur.

5) G değişmeli bir grup ve H, G nin bir alt grubu olsun. $K = \{a \in G : a^2 \in H\}$ kümesinin de G nin bir alt grubu olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her $a, b \in K$ için $a^2, b^2 \in H$ olduğundan $a^2(b^2)^{-1} \in H$ dir. Böylece $(ab^{-1})^{\,2} = (ab^{-1})(ab^{-1}) = (aa)(b^{-1}b^{-1}) = (a^2)(b^{-1})^2 = a^2(b^2)^{-1} \in H$ dır. O halde $ab^{-1} \in K$ olur. Böylece K, G nin bir alt grubudur.

6) K, bir H grubunun alt grubu ve H de bir G grubunun alt grubu ise K, G nin bir alt grubu mudur? Neden?

Çözüm: K, bir H grubunun alt grubu ve H de bir G grubunun alt grubu olsun.
Öyleyse $\emptyset \neq K \subseteq G$ sağlanır ve H nin alt grubu olduğundan ve H de G nin alt grubu olduğundan K, G nin alt grubudur.

7) $H = \{f \in S_5 : f(1) = 1 \; ve \; f(3) = 3 \;\} < S_5$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her $f \in H$ için $f(1) = 1$ ve $f(3) = 3$ olduğundan ve $ff^{-1} = I$ olduğundan $f^{-1}(1) = 1$ ve $f^{-1}(3) = 3$ tür.
Her $f, g \in S_5$ için $fg^{-1}(1) = f\big(g^{-1}(1)\big) = f(1) = 1$ ve $fg^{-1}(3) = f\big(g^{-1}(3)\big) = f(3) = 3$ olduğundan $fg^{-1} \in H$ sağlanır.

8) $H = \{x \in Z_{20}^{*} : x \equiv 1 (mod\ 3)\}$ kümesinin Z_{20}^{*} grubunun alt grubu mudur? Neden?

Çözüm. $H = \{1,7,13,19\}$, Z_{20}^{*} grubunun sonlu bir alt kümesi olduğundan alt grup olduğunu söylemek için kapalılık özelliğini sağladığını göstermek yeterlidir. Fakat $7.7 = 49 = 9(mod 20)$ olur ve böylece $7.7 \notin H$ olduğundan kapalılık özelliği sağlanmaz. O halde H, Z_{20}^{*} grubunun alt grubu değildir.

9) $G = \{(a, b) \colon \; a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0\}$ ve G üzerinde tanımlanan ikili işlem $(a, b) * (c, d) = (a + bc, bd)$ olsun.

- **(a)** $(G,*)$ bir gruptur, gösteriniz.
- **(b)** G değişmeli midir?
- **(c)** $H = \{(a, b) \in G : a = 0\}$, G nin alt grubu mudur?
- **(d)** $K = \{(a, b) \in G : b > 0\}$, G nin alt grubu mudur?
- **(e)** $L = \{(a, b) \in G : b = 1\}$, G nin alt grubu mudur?

(f) G nin birim elemanı $e = (e_1, e_2)$ olmak üzere, $(a,b)^2 = e$ denklemini sağlayan tüm (a,b) elemanlarını belirleyiniz.

Çözüm. (a) i) Her $(a,b),(c,d) \in G,\ (a,b) * (c,d) = (a+bc, bd) \in G$ dir. Çünkü $b \neq 0$ ve $d \neq 0$ olduğundan $bd \neq 0$ olur.

ii) Her $(a,b),(c,d),(e,f) \in G,\ (a,b) * \big((c,d) * (e,f)\big) = (a,b) * (c+de, df) = (a + bc + bde, bdf) = (a+bc, bd) * (e,f)$ bulunur.

iii) Her $(a,b) \in G,\ (a,b) * (0,1) = (0,1) * (a,b) = (a,b)$ olduğundan birim elemanı $(0,1)$ dir.

iv) Her $(a,b) \in G, (a,b) * (t,s) = (t,s) * (a,b) = (0,1)$ iken $t = -a/b$ ve $s = 1/b$ bulunur. Şu halde $(a,b)^{-1} = (-\frac{a}{b}, \frac{1}{b})$ dir.

Sonuç olarak $(G,*)$ bir gruptur.

b) $(5,2) * (3,4) = (11,8)$ iken $(3,4) * (5,2) = (23,8)$ olduğundan değişmeli değildir.

c) Her $(0,b),(0,c) \in H$ için $(0,b) * (0,c)^{-1} = (0,b) * \left(0, \frac{1}{c}\right) = (0, \frac{b}{c}) \in H$ olduğundan $H,\ G$ nin alt grubudur.

d) Her $(a,b),(c,d) \in H$ için $(a,b) * (c,d)^{-1} = (a,b) * \left(-\frac{c}{d}, \frac{1}{d}\right) = (a - \frac{bc}{d}, \frac{b}{d}) \in K$ olduğundan K, G nin alt grubudur.

e) Her $(a,1),(c,1) \in H$ için $(a,1) * (c,1)^{-1} = (a,b) * (-c,1) = (a-c,1) \in L$ olduğundan L, G nin alt grubudur.

f) $(a,b)^2 = (0,1)$ denklemini sağlayan tüm (a,b) elemanlarını belirleyelim:
$(a,b)^2 = (a,b) * (a,b) = (a+ab, b^2) = (0,1)$ sağlayan elemanlar $(0,1)$ ve $(a,-1), a \in \mathbb{R}$ biçimindedir. Yani Çözüm kümesi $Ç.K = \{(a,-1) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,1)\}$ dir.

10) G bir toplamsal grup ve G_1, G_2, G_3 bu grubun alt grupları olsunlar. $G_1 \subseteq G_2 \cup G_3$ ise $G_1 \subseteq G_2$ veya $G_1 \subseteq G_3$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $G_1 \nsubseteq G_2$ ve $G_1 \nsubseteq G_3$ olsun. O halde $a \in G_1 - G_2$, $(a \in G_3)$ ve $b \in G_1 - G_3$, $(b \in G_2)$ vardır. $a,b \in G_1$ ve G_1, G nin alt grubu olduğundan $a+b \in G_1 \subseteq G_2 \cup G_3$ olur. Buradan $a+b \in G_2$ veya $a+b \in G_3$ elde edilir. Eğer $a+b \in G_2$ ise $b \in G_2$ olduğundan $a \in G_2$ çelişkisine varılır. Eğer $a+b \in G_3$ ise $a \in G_3$ olması sebebiyle $b \in G_3$ çelişkisi elde edilir. Sonuç olarak $G_1 \subseteq G_2$ veya $G_1 \subseteq G_3$ sağlanır.

11) $A = \{1,2,3\}$ olmak üzere $S(A) = S_3$ grubunun iki H ve K alt grubunu $H \cup K$ bir alt grup olmayacak şekilde bulunuz.

Çözüm. $H = \{I,(12)\}$ ve $K = \{I,(13)\}$ için $H \cup K = \{I,(12),(13)\}$ kümesi S_3 ün alt grubu değildir, çünkü $(12)(13) = (132) \notin H \cup K$ kapalılık sağlanmaz.

12) G bir grup ve $\emptyset \neq H \subseteq G$ olsun. Her $a \in G$ için $a^{-1} \in H$ ise H, G nin bir alt grubu mudur? Neden?

Çözüm. Her $a \in G$ için $a^{-1} \in H$ olduğunu varsayalım. $a \in G$ keyi olsun. G grup olduğundan $a^{-1} \in G$ ve varsayımdan $a = (a^{-1})^{-1} \in H$ olur. Böylece $G \subseteq H$ olur. Ters kapsama zaten her zaman var olduğundan $H = G$ olur.

13) Klein 4-lü grubunun tüm alt gruplarını bulunuz.

Çözüm. $K_4 = \{e,a,b,ab\}$ nin alt grupları $\{e\},\{e,a\},\{e,b\},\{e,ab\},K_4$ olarak bulunur.

14) G bir grup ve $H < G$ olsun.

(i) $gHg^{-1} = \{ghg^{-1}: h \in H\} < G$ olduğunu gösteriniz.

(ii) $|gHg^{-1}| = |H|$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. a) Her $gh_1g^{-1}, gh_2g^{-1} \in gHg^{-1}$ için $(gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1})^{-1} = g(h_1{h_2}^{-1})g^{-1} \in gHg^{-1}$ olduğundan $gHg^{-1} < G$ dir.

b) $f: H \rightarrow gHg^{-1}$ fonksiyonunu $f(h) = ghg^{-1}$ ile tanımlayalım.

f 1-1 dir: $f(h) = f(h')$ ise $ghg^{-1} = gh'g^{-1}$ den $h = h'$,

f nin örten olduğu ise açıktır. O halde $|gHg^{-1}| = |H|$ elde edilir.

15) $M(S_2)$ grubunu belirleyiniz.

Çözüm: $M(S_2) = \{\, x \in S_2 : \forall g \in S_2 \; için \; gx = xg\} = \{\,(1),(12)\} = S_2$.

16) G değişmeli grup ise $M(G)$ yi belirleyiniz.

Çözüm: $M(G) = \{x \in G : \forall g \in G \ \ i\c{c}in\ gx = xg\}$

G değişmeli grup oldugundan G nin her elemanı $gx = xg$ şartını sağlar. Böylece $M(G) = G$ olur.

17) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in GL(2, R)$ için $M\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$ yi bulunuz.

Çözüm: $M\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL(2, R) : \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\}$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ eşitliğinden $\begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$ elde edilir. Böylece $a = d$ ve $b = c$ bulunur. Diğer taraftan $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \in GL(2, R)$ olması için $a^2 \neq b^2$ yani $a \neq \mp b$ olması gerekir. O halde $M\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} : a \neq \mp b \right\}$ olur.

18) G bir grup ve $a \in G$ olsun. $|a| = 5$ ise $M(a) = M(a^3)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $M(a) = \{ x \in G : xa = ax \}$

$M(a^3) = \{ y \in G : ya^3 = a^3 y \}$ dır.

$\beta \in M(a)$ olsun. Buradan $\beta a = a\beta$ olur. Öte yandan

$\beta a^3 = (\beta a)a^2 = (a\beta)a^2 = (a\beta)aa = a(\beta a)a = a(a\beta)a = aa(\beta a) = aa(a\beta) = a^3\beta$

olduğundan $\beta \in M(a^3)$ olur. Yani $M(a) \subseteq M(a^3)$.

$\beta \in M(a^3)$ olsun. Buradan $\beta a^3 = a^3\beta$ olur. Öte yandan $a^5 = e$ olduğundan

$\beta a = (\beta a^3)a^{-2} = (a^3\beta)a^{-2} = (a^3\beta)a^3 = a^3(\beta a^3) = a^3(a^3\beta) = a^6\beta = a\beta$

sağlandığından $\beta \in M(a)$ olur. Yani $M(a^3) \subseteq M(a)$.

19) G bir grup ve $a \in G$ ise $M(a) = M(a^{-1})$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $M(a) = \{ x \in G : xa = ax \} = \{ x \in G : xaa^{-1} = axa^{-1} \}$

$= \{ x \in G : x = axa^{-1} \} = \{ x \in G : a^{-1}x = a^{-1}axa^{-1} \}$

$= \{ x \in G : a^{-1}x = xa^{-1} \} = M(a^{-1})$.

20) $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ ve H, $\mathbb{Q}^*$ ın bir alt grubu olmak üzere $Z^* = \mathbb{Z} - \{0\} \subseteq H$ ise $H = \mathbb{Q}^*$ dir, ispatlayınız.

Çözüm: H, $\mathbb{Q}^*$ ın bir alt grubu olduğundan $H \subseteq \mathbb{Q}^*$.

$\mathbb{Q}^* \subseteq H$ olduğunu gösterelim:

$x \in \mathbb{Q}^*$ olsun. 2 durum vardır.

Durum 1: $x \in Z^*$ ise, $Z^* = \mathbb{Z} - \{0\} \subseteq H$ olduğundan $x \in H$ olur.

Durum 2: $x \notin Z^*$ ise, $x = \frac{a}{b}$ olacak şekilde $a, b \in Z^*$ vardır.

$x = ab^{-1}$ şeklindede yazılabilir. $a, b \in Z^* \subseteq H$ ve H alt grup olduğundan $ab^{-1} \in H$, yani $x \in H$ olur. Böylece $\mathbb{Q}^* \subseteq H$.

21) G bir grup, $\emptyset \neq H \subseteq G$ olsun. Aşağıdakileri ispatlayınız.

(a) H, G nin alt grubu ise $HH = H$ dır.

(b) H sonlu ve $HH \subseteq H$ ise H, G nin alt grubudur.

(c) Ancak (b) deki ifadenin gerektirmenin H sonlu değil ise doğru değildir.

$HH \subseteq H$ iken G nin alt grubu olmayan bir $\emptyset \neq H \subseteq G$ kümesi bulunuz.

Çözüm:

(a) H, G nin alt grubu olsun. $x \in HH$ olsun. O halde $x = h_1 h_2$ olacak şekilde $h_1, h_2 \in H$ vardır. H alt grup olduğundan $x = h_1 h_2 \in H$ olur. Yani $HH \subseteq H$.

Öte yandan $\forall h \in H$ için $h = he \in He \subseteq HH$ olduğundan $H \subseteq HH$ olur.

(b) H sonlu olduğundan kapalılık özelliğine sahipse Önerme 3.8 den $H < G$ olur. $h_1, h_2 \in H$ alalım. $h_1 h_2 \in H . H \subseteq H$ olduğundan $h_1 h_2 \in H$ olur o halde H kapalılık özelliğine sahiptir.

(c) $(\mathbb{Q}^*, .)$ grubunda tek tam sayılar kümesine T diyelim. $T . T \subseteq T$ fakat $T, \mathbb{Q}^*$ ın alt grubu değildir. $3^{-1} = \frac{1}{3} \notin T$ dir.