3.ALT GRUPLAR

Tanım 3.1. $(G,*)$ bir grup ve H, G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer $(H,*)$ bir grup ise H ye G nin bir **alt grubu** denir ve $H < G$ ile gösterilir.

Not 3.2.
a)$(H,*)$, $(G,*)$ grubunun alt grubu olsun. e_H, H nin birimi ve e, G nin birimi olsun. Şu halde $e_H * e_H = e_H = e_H * e$ olduğundan $e_H = e$ dir. Böylece G ve H gruplarının birimi aynıdır.

b)$h \in H$ olsun. h', h nin H deki tersi ve h^{-1}, h nin G deki tersi olsun. Şu halde $h' = h' * e = h' * (h * h^{-1}) = (h' * h) * h^{-1} = e * h^{-1} = h^{-1}$ olur. Yani $h \in H$ nin H deki ve G deki tersleri aynıdır.

c)$(G,*)$bir grup ise G ve $\{e_G\}$ her zaman $(G,*)$ grubunun alt gruplarıdır. Bu alt gruplara **aşikar alt gruplar** denir.$(G,*)$ grubunun diğer alt gruplarına da **öz alt gruplar** denir.

Önerme 3.3. G bir grup ve $\varnothing \neq H \subseteq G$ olsun. H nin bir alt grup olması için gerek ve yeter koşul

i) $\forall a, b \in H$ için $ab \in H$ ve

ii) $\forall a \in H$ için $a^{-1} \in H$ olmasıdır.

İspat :$\Rightarrow$: $H < G$ olsun. H kendi başına bir grup olduğundan grup aksiyomlarının hepsini sağlar. Bundan dolayı i) ve ii) sağlanır.
$\Leftarrow$: Verilen H kümesi için i) ve ii) koşulları sağlansın. Bu halde birleşme özelliğini ve birim elemanın varlığını göstermek yeterlidir. G deki tüm elemanlar için birleşme özelliği sağlandığından, H alt kümesindeki elemanlar için de sağlanır. Bir $a \in H$ alalım. ii) koşuluna göre $a^{-1} \in H$ dır. Şu halde a, $a^{-1} \in H$ olmasından i) koşuluna göre $aa^{-1} = e \in H$ elde edilir.

Önerme 3.4. G grubun boş olmayan bir H alt kümesinin alt grup olması için gerek ve yeter koşul $\forall a, b \in H$ için $ab^{-1} \in H$ (veya $a^{-1}b \in H$) olmasıdır.

İspat :$\Rightarrow$: $H < G$ ise $\forall b \in H$ için $b^{-1} \in H$ ve $\forall a, b \in H$ için $ab^{-1} \in H$ dır.

$\Leftarrow$: $\forall a, b \in H$ için $ab^{-1} \in H$ olsun. $H \neq \varnothing$ olduğundan $\exists a \in H$ var ve $a = b$ için kabul edilen koşul gereği $aa^{-1} = e \in H$ bulunur. Varsayımdan $\forall\, b \in H$ için $eb^{-1} = b^{-1} \in H$ olur. Şu halde önceki önermenin ii) koşulu sağlanır.

$\forall a, b \in H$ için $b^{-1} \in H$ ve $(b^{-1})^{-1} = b$ göz önünde tutularak, $\forall a, b \in H$ için $a(b^{-1})^{-1} = ab \in H$ bulunur. Şu halde önceki önermenin i) koşulu da sağlanır ve $H < G$ bulunur.

Önerme 3.3 ve Önerme 3.4 den aşağıdaki iki önermeyi ispatlayabiliriz.

Önerme 3.5. G bir toplamsal grup ve $\emptyset \neq H \subseteq G$ olsun. H nin bir alt grup olması için gerek ve yeter koşul

i) $\forall a,b \in H$ için $a+b \in H$ ve

ii) $\forall a \in H$ için $-a \in H$ olmasıdır.

Önerme 3.6. G toplamsal grubunun boş olmayan bir H alt kümesinin alt grup olması için gerek ve yeter koşul $\forall a,b \in H$ için $a-b \in H$ (veya $b-a \in H$) olmasıdır.

Örnekler 3.7

1) G bir değişmeli grup ve $H = \{x \in G : x^2 = e\}$ olsun. Bu halde $H < G$ dir.

Çözüm: Gerçekten $e^2 = e$ olduğundan $H \neq \emptyset$ olur. $\forall a,b \in H$ için $a^2 = b^2 = e$ ve böylece $(ab^{-1})^2 = (ab)^2 = a^2b^2 = e$ olduğundan $ab^{-1} \in H$ dır.

2) $G = \{2^n : n \in Z\}$ adi çarpma işlemine göre bir değişmeli gruptur.

Çözüm: Gerçekten, $G \subseteq R - \{0\}$ ve $R - \{0\}$ adi çarpma işlemine göre gruptur. Buradan $m,n \in Z$ olmak üzere $\forall 2^m, 2^n \in G$ için $2^m(2^n)^{-1} = 2^m 2^{-n} = 2^{m-n} \in G$ dir.

3) G grubunun tüm elemanları ile değişmeli olan elemanların kümesi bir alt gruptur.

Çözüm: Bu elemanların kümesini $M(G)$ile gösterelim. Yani $M(G) = \{a \in G : \forall g \in G \text{ için } ag = ga\}$ olsun. $a,b \in M(G)$ alalım. Şu halde her $g \in G$ için $(ab)g = a(bg) = a(gb) = (ag)b = (ga)b = g(ab)$ olduğundan $ab \in M(G)$ olur. Ayrıca her $g \in G$ için $bg = gb$ eşitliğinde her iki tarafı soldan ve sağdan b^{-1} ile çarpalım. Bu durumda $b^{-1}g = gb^{-1}$ olduğundan $b^{-1} \in M(G)$ dir. Böylece $M(G) < G$ dir. M **ye** G nin **merkezi** denir.

4) G bir grup ve $a \in G$ olsun. $M(a) = \{g \in G : ag = ga\}$ kümesi G nin bir alt grubudur (Bu alt gruba a **nın merkezleştiricisi** denir).

Çözüm: Gerçekten, $\forall x, y \in M(a)$ için $ax = xa$ ve $ay = ya$ dır. $ay = ya$ eşitliğinin her iki tarafını sağdan ve soldan y^{-1} ile çarpalım böylece $y^{-1}a = ay^{-1}$ elde ederiz. Bu durumda $(xy^{-1})a = x(y^{-1}a) = x(ay^{-1}) = (xa)y^{-1} = (ax)y^{-1} = a(xy^{-1})$ olur böylece $xy^{-1} \in M(a)$ dir.

5) S_4 de a=(123) nın $M(a)$ merkezleştiricisini bulalım.

Çözüm:

$$x \in M(a) \Leftrightarrow xax^{-1} = \big(x(1)x(1)x(3)\big) = a = (123) = (231) = (312)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x(1) = 1 \\ x(2) = 2 \\ x(3) = 3 \end{cases} \begin{cases} x(1) = 2 \\ x(2) = 3 \\ x(3) = 1 \end{cases} \begin{cases} x(1) = 3 \\ x(2) = 1 \\ x(3) = 2 \end{cases}$$

bulunur. Bunlar ise sırasıyla

$$x_1 = \binom{123}{123} = e\,,\ x_2 = \binom{123}{231},\ x_3 = \binom{123}{312}$$

permütasyonlarını verir. Sonuç olarak $M(a)$= {e, (123), (132)} bulunur.

6) $n \geq 3$ olmak üzere $M(S_n) = \{e\}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $e \neq \sigma \in S_n$ olsun. İspatı yapmak için $\tau\sigma \neq \sigma\tau$ olacak şekilde $\tau \in S_n$ bulmalıyız. $\sigma \neq e$ olduğundan $\sigma(k) = m \neq k$ olacak şekilde $k, m \in I_n$ vardır. $n \geq 3$ olduğundan birbirinden farklı $k, l, m \in I_n$ vardır. $\tau = (kl)$ transpozisyonunu göz önüne alalım. Şu halde $(\tau\sigma)(k) = \tau(m) = m$ dir. Şimdi $(\sigma\tau)(k) = \sigma(l) \neq m$ olduğunu gösterelim. Eğer $\sigma(l) = m$ ise $\sigma(l) = \sigma(k)$ olduğu görülür. Fakat σ birebir olduğundan $l = k$ çelişkisi elde edilir. Böylece $n \geq 3$ olmak üzere $M(S_n) = \{e\}$ elde ederiz.

8) Tam sayıların toplamsal grubunun tüm alt grupları $k \in Z$ olmak üzere kZ şeklindedir, gösteriniz.

Çözüm: $H < Z$ olsun. Eğer $H = \{0\}$ ise $H = 0Z$ dir. Eğer $H \neq \{0\}$ ise H da sıfır olmayan bir tamsayı vardır. H yi bir alt grup kabul ettiğimiz için, bu tamsayının ters işaretlisi de H de olur. Buradan H de pozitif bir tamsayı var ve pozitif tamsayılar iyi sıralı olduğundan H deki pozitif tamsayıların en küçüğü vardır.

Bu tamsayı k olsun. $H = kZ = \{km : m \in Z\}$ olduğunu gösterelim. $k \in H$ olduğundan $kZ \subseteq H$ bulunur. Tersine herhangi bir $h \in H$ alalım. h yi k ile kalanlı olarak bölersek ; $h = qk + r$, $0 \leq r < k$ olacak şekilde $q, r \in \mathbb{Z}$ bulabiliriz. $r = h - qk \in H$ olduğundan, k nın seçiminden dolayı $r = 0$, yani $h = kq \in kZ$ elde edilir. Sonuçta Z nin bütün alt grupları $H = kZ = \{km : m \in Z\}$ şeklindedir.

9) $G = \{a + b\sqrt{5}i : a, b \in Q, a \neq 0$ veya $b \neq 0\}$ ise $G < \mathbb{C} - \{0\}$ dır. Çünkü, $a + b\sqrt{5}i, c + d\sqrt{5}i \in G$ için

$$(a + b\sqrt{5}i)(c + d\sqrt{5}i)^{-1} = \frac{a + b\sqrt{5}i}{c + d\sqrt{5}i} \quad (c \neq 0 \text{ veya } d \neq 0)$$

$$= \frac{(a + b\sqrt{5}i)(c - d\sqrt{5}i)}{c^2 + 5d^2} \quad (c^2 + 5d^2 \neq 0)$$

$$= \frac{ac+5bd}{c^2+5d^2} + \frac{(bc-ad)\sqrt{5}}{c^2+5d^2}i \text{ olur.}$$

Şimdi $\frac{ac+5bd}{c^2+5d^2} \neq 0$ veya $\frac{(bc-ad)\sqrt{5}}{c^2+5d^2} \neq 0$ olduğunu gösterirsek $\frac{a+b\sqrt{5}i}{c+d\sqrt{5}i} \in G$ olur. Varsayalım ki $\frac{ac+5bd}{c^2+5d^2} = 0 = \frac{(bc-ad)\sqrt{5}}{c^2+5d^2}$ olsun. O halde $ac + 5bd = 0 = bc - ad$ bulunur. Eğer $a = 0$ ise bu durumda $b \neq 0$ olacağından $c = d = 0$ çelişkisi elde edilir. Böylece $a \neq 0$ elde edilir. Benzer biçimde $b \neq 0$ dir. O halde $ac = -5bd$ ve $bc = ad$ eşitliklerini taraf tarafa çarpıp ab yi sadeleştirelim. Böylece $c^2 = -5d^2$ yani $c^2 + 5d^2 = 0$ çelişkisi elde edilir.

Şimdi analizden birkaç alt grup örneği verelim.

10) i) Yakınsak reel dizilerin kümesinin $C = \{(a_n)_{n=1}^{\infty}: \lim_{n\to\infty} a_n \ var\}$ bi toplamsal grup olduğunu göstermiştik. Sıfıra yakınsayan dizilerin kümesi $C_0 = \{(a_n)_{n=1}^{\infty}: \lim_{n\to\infty} a_n = 0\} \subseteq C$ alt kümesi olduğu açıktır. Şimdi C_0 ın C nin alt grubu olduğunu gösterelim. Sıfır dizisinin limiti sıfır olduğundan sıfır dizisi C_0 ın elemanı olup C_0 kümesi boştan farklıdır. $(a_n),(b_n) \in C_0$ alalım. O halde $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n$ olur. Böylece $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ olduğundan $(a_n) - (b_n) \in C_0$ olur.
ii) $[-1,1]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli reel değerli fonksiyonlarının kümesinin yani $C[-1,1]$ in toplamsal bir grup olduğu gösterilmişti. Şimdi $S = \{f \in C[-1,1]: f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0\}$ kümesinin bir alt grup olduğunu gösterelim. $f(x) = cos2x \in S$ olduğundan $S \neq \emptyset$ dir. Şimdi $f, g \in S$ alalım. $f, g \in C[-1,1]$ ve $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 = g(\frac{\pi}{4})$ olur. O halde $f - g \in C[-1,1]$ ve $(f-g)\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) - g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ olduğundan $f - g \in S$ olur. O halde $S < C[-1,1]$ dir.

Önerme 3.8. H bir G grubunun boş olmayan sonlu bir alt kümesi ve G deki işlemlere göre kapalı ise $H < G$ dır.

İspat: Önerme 3.3 ün i) kapalılık koşulu sağlandığından ii) koşulunun sağlandığını da gösterirsek, ispat tamamlanmış olur. Bir $a \in H$ alalım. Eğer $a = e$ ise $a^{-1} = e \in H$ dir. $a \neq e$ olsun. H de işlem kapalı olduğundan a nın tüm pozitif kuvvetleri de H de bulunur. Fakat H sonlu bir küme olduğundan $a, a^2, ..., a^m, ...$ elemanlarının hepsi farklı olamazlar. Şu halde $r > s > 0$ tamsayıları için $a^r = a^s$ olur. Buradan $a^{r-s} = e$ ve $a \neq e$ kabul ettiğimizden $r - s > 1$ olmalıdır. Böylece $r - s - 1 > 0$ dır. Şu halde $a^{r-s-1} = a^{-1} \in H$ elde edilir.

Önerme 3.9. Bir grubun bir takım alt gruplarının ara kesiti de bir alt grubudur.

İspat : $\{H_i\}_{i\in I}$ ailesi, G grubunun bir takım alt grupları ve $H = \bigcap_{i\in I} H_i$ olsun. $\forall a, b \in H$ için $ab^{-1} \in H$ olduğunu ispatlayalım.

$a, b \in H \Rightarrow \forall i \in I$ için $a, b \in H_i$

$\Rightarrow \forall i \in I$ için $ab^{-1} \in H_i$ (Çünkü H_i alt grup)

$\Rightarrow ab^{-1} \in H = \bigcap_{i\in I} H_i$

olduğundan $H < G$ dir.

Not 3.10. Bir grubun iki alt grubunun birleşimi alt grup olması gerekmez. Gerçekten, Z toplamsal grubunun $2Z$ ve $3Z$ alt grupların göz önüne alırsak $2, 3 \in 2Z \cup 3Z$ olduğu halde $1 = 3 - 2 \notin 2Z \cup 3Z$ dır.

Tanım 3.11. G bir grup ve A, B bu grubun iki alt kümesi olsun. $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$ ye A ile B kümelerinin çarpımı denir.

Özel olarak, $A = \{a\}$ ise $\{a\}B = aB$ ile gösterilir. Benzer tanım toplamsal gruplar içinde yapılır.

H, K kümeleri G nin iki farklı alt grubu olmak üzere $HK = KH$ eşitliği her zaman doğru değildir. Şimdi aşağıda bu duruma bir örnek verelim.

Örnek 3.12. $G = S_3$ grubunun $A = \{(123), (12)\}$ ve $B = \{(13), (23)\}$ alt kümelerini göz önüne alalım.

$AB = \{(123)(13), (12)(13), (123)(23), (12)(23)\}$ $=\{(23),(132),(12),(123)\}$

BA=$\{(13)(123),(23)(123),(13)(12),(23)(12)\}$=$\{(12),(13),(123),(132)\}$

Böylece $AB \neq BA$.

Ayrıca $B = C$ ise $AB = AC$ eşitliği her zaman sağlanırken, tersi her zaman doğru değildir. Şimdi de buna bir örnek verelim.

Örnek 3.13. S_3 ün üç alt kümesi $A = \{(123), (132)\}$, $B = \{(13), (23)\}$ ve $C = \{(12), (13)\}$ olsun.

$AB = \{(23), (12), (13)\} = AC$ fakat $B \neq C.(B = C \Rightarrow AB = AC)$

Bir G grubunun iki alt grubunun çarpımı alt grup olmak zorunda değildir. Şimdi bir örnek verelim.

Örnek 3.14. $G = GL(2, Q)$ olmak üzere G bir gruptur. ($GL(2, Q)$ = Q rasyonel sayılar olmak üzere elemanları Q dan alınmış determinantları sıfırdan farklı 2x2 lik matrisler)

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in Q \right\}$$ ve

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} : a \in Q \right\}$$ olsun. H ve K, G nin alt grubudur.

$$HK = \left\{ \begin{pmatrix} 1+ab & b \\ a & 1 \end{pmatrix} : a, b \in Q \right\}$$

HK, G nin bir alt grubu değildir. Gerçekten

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in HK$ fakat $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \notin HK$ dır.

Önerme 3.15. G bir grup ve $H, K < G$ olsun. $HK < G \Leftrightarrow HK = KH$ olmasıdır.

İspat : $\Rightarrow$: $HK < G$ olsun. $\forall h \in H, \forall k \in K$ için $h^{-1} \in H, k^{-1} \in K$ olduğunu göz önünde tutularak $h^{-1}k^{-1} \in HK$ ve $kh = (h^{-1}k^{-1})^{-1} \in HK$ bulunur. Bu halde $KH \subseteq HK$ olur.

Diğer kapsama için $x \in HK$ alalım. HK alt grup olduğundan $x^{-1} = hk \in HK$ dır. Şu halde $x = (hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in KH$, yani $HK \subseteq KH$.
$\Leftarrow$: $HK = KH$ olsun. $\forall x, y \in HK$ için, $x = h_1k_1$ ve $y = h_2k_2$ olacak şekilde $\exists h_1, h_2 \in H$ ve $\exists k_1, k_2 \in K$ vardır. $xy^{-1} = (h_1k_1)(h_2k_2)^{-1} = h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1}$ dir. $k_1k_2^{-1} \in K$ ve $h_2^{-1} \in H$ olduğundan $(k_1k_2^{-1})h_2^{-1} \in KH$ bulunur. Kabulümüzden $HK = KH$ olduğundan ve $(k_1k_2^{-1})h_2^{-1} = hk$ olacak şekilde $\exists h \in H$ ve $\exists k \in K$ bulunur. Şu halde $xy^{-1} = h_1(k_1k_2^{-1})h_2^{-1} = (h_1h)k \in HK$ elde edilir. Buradan $HK < G$ olduğu anlaşılır.

Önerme 3.16. S_n nin $(n \geq 2)$ bütün çift permütasyonlarının kümesi A_n, S_n nin n!/ 2 elemanlı alt grubudur. (A_n ye **Alterne grup** denir)

İspat : $e \in A_n$ olduğundan $\emptyset \neq A_n \subseteq S_n$ dir. $\forall\, f, g \in A_n$ için f ve g çift sayıda 2 linin çarpımı olduğundan fg de çift sayıda 2 linin çarpımı olur yani $fg \in A_n$ dir. A_n sonlu Önerme 3.8 den $A_n < S_n$ dir. S_n grubunun eleman sayısı $n!$ dir. S_n de tek ve çift permütasyonların sayısının aynı olduğunu gösterirsek A_n grubunun eleman sayısı $n!/2$ elde edilir. $A_n = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ olsun. A_n nin elemanlarını bir (ab) ikilisi ile çarpalım. $\{(ab)f_1, (ab)f_2, \dots, (ab)f_k\}$ permütasyonları da tek olur ve bunların dışında tek permütasyon yoktur. Gerçekten bir g tek permütasyonunu alalım $(ab)g \in A_n$ ve $(ab)g = f_i \Rightarrow g = (ab)f_i (1 \leq i \leq k)$ olur.

SORULAR

1) Tek tamsayılar kümesi T, çift tamsayılar kümesi C olsun T ve C, $\mathbb{Z}$ nin birer alt grubu mudur? Neden?

2) $r, s \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $H = \{nr + ms : n, m \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin $\mathbb{Z}$ nin alt grubu olduğunu gösteriniz.

3) $\mathbb{C}$ kompleks sayılar grubunun $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ alt kümesinin $\mathbb{C}$ nin alt grubu olduğunu gösteriniz.

4) $G = GL(2, R)$ ve $H = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a \text{ ve } b \text{ sıfırdan farklı reel sayılar}\right\}$ ise $H < G$ olduğunu gösteriniz.

5) G değişmeli bir grup ve H, G nin bir alt grubu olsun. $K = \{a \in G : a^2 \in H\}$ kümesinin de G nin bir alt grubu olduğunu gösteriniz.

6) K, bir H grubunun alt grubu ve H de bir G grubunun alt grubu ise K, G nin bir alt grubu mudur? Neden?

7) $H = \{f \in S_5 : f(1) = 1 \ ve\ f(3) = 3\} < S_5$ olduğunu gösteriniz.

8) $H = \{x \in Z_{20}^* : x \equiv 1 (mod\ 3)\}$ kümesinin Z_{20}^* grubunun alt grubu mudur? Neden?

9) $G = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0\}$ ve G üzerinde tanımlanan ikili işlem $(a, b) * (c, d) = (a + bc, bd)$ olsun.

(a) $(G, *)$ bir gruptur, gösteriniz.
(b) G değişmeli midir?
(c) $H = \{(a, b) \in G : a = 0\}$, G nin alt grubu mudur?
(d) $K = \{(a, b) \in G : b > 0\}$, G nin alt grubu mudur?
(e) $L = \{(a, b) \in G : b = 1\}$, G nin alt grubu mudur?
(f) G nin birim elemanı $e = (e_1, e_2)$ olmak üzere, $(a, b)^2 = e$ denklemini sağlayan tüm (a, b) elemanlarını belirleyiniz.

10) G bir toplamsal grup ve G_1, G_2, G_3 bu grubun alt grupları olsunlar. $G_1 \subseteq G_2 \cup G_3$ ise $G_1 \subseteq G_2$ veya $G_1 \subseteq G_3$ olduğunu gösteriniz.

11) $A = \{1, 2, 3\}$ olmak üzere $S(A) = S_3$ grubunun iki H ve K alt grubunu $H \cup K$ bir alt grup olmayacak şekilde bulunuz.

12) G bir grup ve $\emptyset \neq H \subseteq G$ olsun. Her $a \in G$ için $a^{-1} \in H$ ise H, G nin bir alt grubu mudur? Neden?

13) Klein 4-lü grubunun tüm alt gruplarını bulunuz.

14) G bir grup ve $H < G$ olsun.

(i) $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} : h \in H\} < G$ olduğunu gösteriniz.

(ii) $|gHg^{-1}| = |H|$ olduğunu gösteriniz.

15) $M(S_2)$ grubunu belirleyiniz.

16) G değişmeli grup ise $M(G)$ yi belirleyiniz.

17) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in GL(2, R)$ için $M\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$ yi bulunuz.

18) G bir grup ve $a \in G$ olsun. $|a| = 5$ ise $M(a) = M(a^3)$ olduğunu gösteriniz.

19) G bir grup ve $a \in G$ ise $M(a) = M(a^{-1})$ olduğunu gösteriniz.

20) $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ ve H, $\mathbb{Q}^*$ ın bir alt grubu olmak üzere $\mathbb{Z} - \{0\} \subseteq H$ ise $H = \mathbb{Q}^*$ dir, ispatlayınız.

21) G bir grup, $\emptyset \neq H \subseteq G$ olsun. Aşağıdakileri ispatlayınız.

(a) H, G nin alt grubu ise $HH = H$ dır.

(b) H sonlu ve $HH \subseteq H$ ise H, G nin alt grubudur.

(c) Ancak (b) deki ifadenin gerektirmenin H sonlu değil ise doğru değildir.

$HH \subseteq H$ iken G nin alt grubu olmayan bir $\emptyset \neq H \subseteq G$ kümesi bulunuz.