

# ÖDEV SORULARI

## BÖLÜM 2: İDEALLER

1)  $S, R$  halkasının boştan farklı herhangi alt kümesi olsun.

$ann_r(S) = \{r \in R: \forall a \in S \text{ için } ar = 0_R\}$  kümesi  $S$  nin sağ sıfırlayıcısı

$ann_l(S) = \{r \in R: \forall a \in S \text{ için } ra = 0_R\}$  kümesi  $S$  nin sol sıfırlayıcısı olmak üzere

i)  $ann_r(S)$  kümesi  $R$  nin bir sağ idealidir.

ii)  $ann_l(S)$  kümesi  $R$  nin bir sol idealidir.

iii) Eğer  $S, R$  nin bir sağ ideali ise  $ann_r(S)$  kümesi  $R$  nin bir idealidir.

iv) Eğer  $S, R$  nin bir sol ideali ise  $ann_l(S)$  kümesi  $R$  nin bir idealidir.

2) Bir önceki soruda verilmiş tanımları göz önüne alarak aşağıdakileri gösteriniz.

i) Eğer  $S$  kümesi  $R$  nin bir ideali ise  $ann_r(S)$  ve  $ann_l(S)$  kümeleri de  $R$  nin idealleridir.

ii)  $R$  birimli halka ise  $ann_r(R) = ann_l(R) = \{0_R\}$  olur.

3)  $R$  bir halka olmak üzere

i)  $I$  ve  $J$  kümeleri  $R$  nin iki ideali olsun.  $I \cup J$  de  $R$  nin bir ideali olur mu? Gösteriniz.

ii)  $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \{1,2,\dots\}}$  kümesi  $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$  olacak şekilde  $R$  nin bazı ideallerinden oluşan bir aile olsun. Bu durumda  $\bigcup_\alpha I_\alpha$  nin  $R$  de bir ideal olduğunu gösteriniz.

4)  $R$  bir halka olmak üzere  $I, J$  ve  $K$  kümeleri  $R$  nin idealleri olsun. Bu durumda aşağıdakileri gösteriniz.

i)  $I(J + K) = IJ + IK$

ii)  $(I + J)K = IK + JK$

5)  $\mathbb{Z}$  tamsayılar halkasında  $I = (12)$  ve  $J = (21)$  olsun. O halde aşağıdakileri gösteriniz.

(Yol Gösterme:  $c = a/ebob(a, b)$  olmak üzere  $((a):(b)) = (c)$  dir.)

i)  $I + J = (3)$

ii)  $I \cap J = (84)$

iii)  $IJ = (252)$

iv)  $(I:J) = (4)$

v)  $(J:I) = (7)$

- 6)  $R$  değişmeli bir halka olmak üzere  $I, J$  ve  $K$  kümeleri  $R$  nin idealleri olsun. Bu durumda aşığıdakileri gösteriniz.
- i)  $I \subseteq J$  ise  $(I:K) \subseteq (J:K)$  ve  $(K:J) \subseteq (K:I)$  dir.
  - ii)  $(I:J) = (I:I+J)$  dir.
  - iii)  $n \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere  $(I:J^{n+1}) = ((I:J^n):J) = ((I:J):J^n)$  dir.
- 7)  $I$  ve  $J$  kümeleri  $R$  halkasının iki ideali olsun.  $(I:{}_r J) = \{a \in R: aJ \subseteq I\}$  ve  $(I:{}_l J) = \{a \in R: Ja \subseteq I\}$  olmak üzere aşığıdaki eşitlikleri gösteriniz.
- i)  $(0_{R:{}_r} I) = \text{ann}_l(I)$
  - ii)  $(0_{R:{}_l} I) = \text{ann}_r(I)$
- 8)  $P(X)$ , herhangi bir  $X$  kümesinin bütün alt kümelerinin oluşturduğu halka olsun.  $X$  in bütün sonlu alt kümeleri  $P(X)$  de bir ideal oluşturur, gösteriniz.
- 9)  $R$  bir birimli halka ve  $I$  da onun bir sağ ideali olsun. Bu durumda  $(I:{}_l R) = \{a \in R: Ra \subseteq I\}$  kümesinin,  $I$  da kapsanan en büyük ideal olduğunu gösteriniz.
- 10)  $I$  ve  $J$  kümeleri  $R$  halkasının  $I \subset J$  olacak şekilde iki ideali olsun. O halde  $J/I$  kümesinin  $R/I$  nın bir ideali olduğunu gösteriniz.