2. SİMETRİK GRUPLAR

Tanım 2.1. X boş olmayan bir küme olmak üzere X den X e birebir örten fonksiyona **permütasyon** denir.

Tanım 2.2. X boş olmayan bir küme olsun. S_X ile X den X e tüm birebir örten fonksiyonlar kümesini gösterelim. Yani

$$f \in S_X \Leftrightarrow f: X \to X, \ f \text{ birebir ve örten}$$

dir. S_X kümesi bileşke işlemi altında bir gruptur. Gerçekten; X üzerinde i_X birim fonksiyonu X den X e birebir örten fonksiyon olduğundan $i_X \in S_X$ ve böylece $S_X \neq \emptyset$ dur. $f, g \in S_X$ için fog bileşkesi X ten X e birebir ve örten bir fonksiyon olduğu için $fog \in S_X$ dir. Ayrıca "o" işleminin birleşme özelliğine sahip olduğu açıktır. Her $f \in S_X$ için $f^{-1} \in S_X$ ve $fof^{-1} = i_X = f^{-1}of$ dir. Böylece (S_X, o) bir gruptur. (S_X, o) grubuna **permütasyon grubu** denir.

Not 2.3. (S_X, o) grubu değişmeli olması gerekmez. Gerçekten, $X = \{a, b, c\}$ olsun. Şimdi $f(a) = b, f(b) = a, \ f(c) = c$ ve $g(a) = b, g(b) = c, g(c) = a$ olmak üzere $f, g \in S(X)$ olduğunu kabul edelim. Böylece $(fog)(b) = f\big(g(b)\big) = f(c) = c$ ve $(gof)(b) = g\big(f(b)\big) = g(a) = b$ olduğundan $fog \neq gof$ dir.

$n \geq 1$ olmak üzere $I_n = \{1,2, \dots, n\}$ olsun. f nin I_n üzerinde bir permütasyon olduğunu kabul edelim. Şu halde $f = \{\big(1, f(1)\big), \big(2, f(2)\big), \dots, \big(n, f(n)\big)\}$ olur. (Genel olarak bir $f: A \to A$ fonksiyonu $A \times A$ nın alt kümesi olduğunu hatırlayalım)

Bu fonksiyonu $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$ şeklinde de gösterebiliriz. Yani üst sıraya I_n nin elemanlarını ve alt sıraya her bir $i \in I_n$ için $f(i)$ elemanını yazıyoruz.

Not 2.4. Yukarıdaki gösterilişleri şu şekilde de tanımlayabiliriz. $f \in I_n$ ve f, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesinden kendi üzerine bir 1-1 fonksiyon olsun. $i_1, i_2, \dots, i_n$; $1, 2, \dots, n$ nin değişik sırada sıralanışı yani bir permütasyonu olmak üzere $f(x_k) = x_{i_k}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ ise f fonksiyonunu, her elemanın altına görüntüsünü yazarak; $f = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_{i_1} & \dots & x_{i_n} \end{pmatrix}$ şeklinde veya x leri yazmayarak $f = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ ile gösterilebilir.

Örnek 2.5. $I_4 = \{1,2,3,4\}$ ve $f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 3, f(4) = 1$ olmak üzere f, I_4 üzerinde bir permütasyon olsun. f permütasyonunu

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca $f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ olduğu görülür.

Örnek 2.6. π ve σ,

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 6 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

olmak üzere I_7 üzerinde iki permütasyon olsun. Şimdi $\pi o \sigma$ yi hesaplayalım. Tanımdan her $i \in I_7$ için $(\pi o \sigma)(i) = \pi\big(\sigma(i)\big)$ dir. Örneğin,

$$(\pi o \sigma)(1) = \pi\big(\sigma(1)\big) = \pi(2) = 3$$

$$(\pi o \sigma)(2) = \pi\big(\sigma(2)\big) = \pi(5) = 7$$

olduğu görülür. Diğer işlemler yapılarak

$$\pi o \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$ olduğu görülür.

Örnek 2.7. α ve β,

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

olmak üzere I_6 üzerinde iki permütasyon olsun. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\alpha o \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ve } \beta o \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$ olduğu görülür.

Şimdi $n \geq 1$ olmak üzere I_n üzerindeki tüm permütasyonlar kümesini S_n ile gösterelim.

Teorem 2.8.

(i) $n \geq 1$ olacak şekilde her pozitif tam sayı için S_n bir gruptur.

(ii) $n \geq 3$ ise S_n değişmeli değildir.

(iii) S_n grubun eleman sayısı $n!$ dir.

İspat. (i) Tanım 2.2 den kolayca görülür.

(ii) $n \geq 3$ ve $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 3 & 2 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$ ve $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 3 & 2 & 1 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$ olmak üzere $\alpha o \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 3 & 1 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$ ve $\beta o \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 3 & 1 & 2 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$ olduğu görülür. Böylece $(\alpha o \beta)(1) = 2 \neq 3 = (\beta o \alpha)(1)$ ve $\alpha o \beta \neq \beta o \alpha$ olduğu görülür.

(iii) n elemanlı bir kümeden kendi üzerine bire-bir ve örten fonksiyon sayısı $n!$ olduğundan S_n grubun eleman sayısı $n!$ dir.

Örnek 2.9. S_3 grubunun elemanlarını belirleyelim. S_3 grubunun eleman sayısı Teorem 2.8. (iii) den 6 tanedir. e birim dönüşüm olmak üzere $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ olur. Diğer elemanlar ise

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Böylece $S_3 = \{e, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ olduğu görülür. Şimdi $\alpha_2 = \alpha$ ve $\alpha_4 = \beta$ dersek $\beta^2 = \alpha_5$ ve $\alpha o \beta = \alpha_1$, $\alpha o \beta^2 = \alpha_3$ elde edilir. Bundan dolayı

$$S_3 = \{e, \beta, \beta^2, \alpha, \alpha o \beta, \alpha o \beta^2\}$$

yazabiliriz.

Tanım 2.10. I_n üzerindeki (S_n, o) grubuna **simetrik grup** denir.

Not 2.11. $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$ permütasyonunu gözönüne alalım. Eğer $f(i) = i$ ise i. ci sütunu yazmayabiliriz. Örneğin, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ dir.

Tanım 2.12 $f \in S_n$ olsun. f permütasyonu $j_1, j_2, \dots, j_k$ $(k > 1)$ farklı doğal sayılar olmak üzere

$f(j_1) = j_2$, ... , $f(j_{k-1}) = j_k$, $f(j_k) = j_1$ ve I_n nin diğer elemanları için $f(a) = a$ ile tanımlı ise $f = (j_1\ j_2\ \dots\ j_k)$ şeklinde gösterilir ve k uzunluğunda bir **devir** denir(veya $\boldsymbol{k-l\imath\ devir}$ denir). 1 uzunluğundaki bir devir **özdeşlik fonksiyonu** olarak alınır.

$$f = (j_1\, j_2\ \dots\ j_k) = (j_2\ j_3\ \dots\ j_k\ j_1) = (j_k\ j_1\ \dots\ j_{k-1})$$

farklı şekillerde yazılabilir. 2 uzunluğundaki devire **transpozisyon** denir.

Örnek 2.13 $(1\ 2\ 3\ 5) \in S_5$ devrini açık olarak yazarsak $\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ 2\ 3\ 5\ 4\ 1 \end{pmatrix}$ permütasyonunu verir.

Örnek 2.14. Tanım 2.12 deki devir notasyonunu kullanarak

$S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ olduğu görülür.

($\boldsymbol{a}$) Teorem 2.8 den S_3 eleman sayısı 6 olan değişmeli olmayan bir gruptur.

($\boldsymbol{b}$) $(123)^3 = (123)\ o(123)o(123) = e$, $(132)^3 = e$ dir.

($\boldsymbol{c}$)$(12)\ o(23) = (123)$, $(13)o(12) = (123)$,$(12)o(13) = (132)$, $(23)o(12) = (132)$, $(13)o(23) = (132)$, $(23)o(13) = (123)$.

Tanım 2.15. σ ve τ gibi iki devirin hiçbir ortak elemanı yoksa bu iki devire **ayrık** devirler denir.

Not 2.16. Bundan sonra $f, g \in S_n$ için fog yerine fg yazacagız.

Teorem 2.17. Ayrık devirlerin çarpımı değişmelidir.

İspat : $f = (i_1 i_2\ \dots i_r)$ ve $g = (j_1\, j_2\ \dots\, j_s)$, S_n de iki ayrık devir olsun.

$n \notin \{\, i_1, i_2, \ \dots\ , i_r\,,\ j_1,\ j_2,\ \dots\ ,\ j_s\,\}$ ise $f(n) = n$ ve $g(n) = n$ dir. Buradan

$g\big(f(n)\big) = g(n) = n$ ve $f(g(n)) = f(n) = n$ olur.

Eğer $n \in \{\, i_1,\ i_2,\ \dots\ , i_r\,\}$ ise $f(n) \in \{i_{1,}\ i_2,\ \dots\ , i_r\}$ dir. f ve g ayrık olduklarından $n, f(n) \notin \{j_1,\ j_2,\ \dots\ ,\ j_s\,\}$ dir. Şu halde $g(n) = n$ ve $g\big(f(n)\big) = f(n)$ dir. Diğer taraftan $f\big(g(n)\big) = f(n)$ dir. Benzer şekilde $n \in \{j_1\,, j_2\,, \dots, j_s\}$ için de $f\big(g(n)\big) = g\big(f(n)\big)$ olduğu gösterilebilir. Böylece $gf = fg$ dir.

Teorem 2.18. $n \geq 2$ olmak üzere S_n deki her permütasyon sıra gözetilmeksizin ayrık devirlerin çarpımı olarak tek türlü yazılabilir.

İspat : $f \in S_n$ olsun. 1 in f altında ard arda görüntülerini alalım. $|S_n| = n!$ sonlu olduğundan $1,\ f(1),\ f^2(1),\ \dots$ dizisi sonlu olur. Böylece bu dizi belli bir adımdan sonra tekrar eder. Şu halde $f^k(1) = 1$ olacak şekilde en küçük bir pozitif k tam sayısı var ve $1, f(1), \dots, f^{k-1}(1)$ elemanları birbirinden farklıdır. Böylece k uzunluğunda bir $(\, 1\ f(1)\ \dots\ f^{k-1}(1)\,)$ deviri elde edilir. İşleme bu devirde gözükmeyen başka bir sayı alarak devam edilirse, elde edilen devirler ayrık olur ve çarpımları f yi verir. Bu şekilde f yi ayrık devirlere ayırma sıra gözetilmezse tek türlü olur.

Örnek 2.19. $f = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \\ 1\ 5\ 4\ 6\ 2\ 3 \end{pmatrix} = (1)(25)(346)$ dır.

Önerme 2.20. Her devir 2 li devirlerin bir çarpımıdır.

İspat : $e = (12)(12)$ ve $r \geq 2$ için

$$(i_1\, i_2\ \dots i_r) = (i_1\, i_r) \dots (i_1\, i_3)(i_1 i_2)$$

olduğu görülür.

Sonuç. 2. 21. $S_n (n \geq 2)$ deki her permütasyon transpozisyonların çarpımı olarak yazılabilir. Bir devirin 2 li devirlerin çarpımı olacak şekilde yazılması tek türlü değildir. Fakat bir permütasyonun ayrıldığı 2 li devirlerin sayısının tekliği ve çiftliği değişmez.

Örnek 2.22. f = (1 2 3 4) = (1 4)(1 3)(1 2) = (1 4)(2 3)(2 3)(13)(1 2) olduğundan f tek permütasyondur.

Tanım 2.23 . Bir permütasyon çift sayıda 2 linin çarpımı ise bu permütasyona **çift permütasyon**, aksi halde **tek permütasyon** denir.

S_n $(n \geq 2)$ deki çift permütasyonların kümesi A_n ile gösterelim. $e = (12)(12) \in A_n$ olduğu açıktır.

Örnek 2.24. $S_3 = \{e, (12), (23), (13), (123), (213)\}$ ve $A_3 = \{e, (123), (132)\}$ dir.

Önerme 2.25. $f \in S_n$ için $f(i_1 i_2 \dots i_r) f^{-1} = \big(f(i_1) f(i_2) \dots f(i_r)\big)$ dir.

İspat. $\forall\ 1 \leq x \leq n$ için iki durum söz konusudur.

Durum 1. $f^{-1}(x) \notin \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ olsun. Şu halde

$f^{-1}(x) \notin \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \Leftrightarrow x \notin \{f(i_1), f(i_2), \dots, f(i_r)\}$ dir. Böylece

$$(i_1 i_2 \dots i_r)\big(f^{-1}(x)\big) = f^{-1}(x) \quad \text{ve} \quad (f(i_1 i_2 \dots i_r) f^{-1})(x) = x$$

elde edilir. Benzer şekilde $\big(f(i_1) f(i_2) \dots f(i_r)\big)(x) = x$ dir.

Durum 2. $f^{-1}(x) \in \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ olsun. Şu halde $x = f(i_j)$ olacak şekilde $j \in \{1,2,3, \dots, r\}$ vardır. Böylece

$$(f(i_1 i_2 \dots i_r) f^{-1})(x)) = (f(i_1 i_2 \dots i_r) f^{-1})\big(f(i_j)\big) = \begin{Bmatrix} f(i_{j+1}) & j < r \\ f(i_1) & j = r \end{Bmatrix}$$

Benzer şekilde $\Big(\big(f(i_1) f(i_2) \dots f(i_r)\big)\Big)\big(f(i_j)\big) = \begin{Bmatrix} f(i_{j+1}) & j < r \\ f(i_1) & j = r \end{Bmatrix}$ sağlanır. Sonuç olarak $f(i_1 i_2 \dots i_r) f^{-1} = \Big(\big(f(i_1) f(i_2) \dots f(i_r)\big)\Big)$ dir.

Örnek 2.26. S_4 de $f = (132)$ ise $f(123) f^{-1} = \big(f(1) f(2) f(3)\big)$ =(312).

Örnek 2.27. Bir eşkenar üçgenin köşe noktalarını sırası ile 1,2,3 ile gösterelim. Şu halde $X = \{1,2,3\}$ olsun. Bu X kümesinin permütasyonları aşağıdaki gibidir.

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \ a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \ a^2 b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ ab = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Bu permütasyonlardan a, a^2, e sırasıyla üçgenin köşelerinin 120, 240 ve 360 derecelik dönmelerine karşılık gelir. Diğer permütasyonlar ise kenerortaylara göre simetrilere karşılık gelir. Böylece $\{e, a, a^2, b, ab, a^2 b\}$ kümesi bileşke işlemi altında bir grup oluşturur. Bu gruba **üçgenin simetriler grubu** denir. Ayrıca bu gruba **3. Dihedral Grubu** da denmektedir ve $\boldsymbol{D_3}$ ile gösterilmektedir. Yukarıdan $S_3 = D_3$ olduğunu görebiliriz

Not 2.28. Örnek 2.27 ye benzer olarak *n* kenarlıların simetri grubunu elde edebiliriz. Bu gruba ***n*. dihedral grup** denir ve D_n ile gösterilir. Bu konuya 4. bölümde devam edeceğiz.

SORULAR

1) Aşağıdaki permütasyonları ayrık devirlerin çarpımı olarak yazınız.

i) $\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 \\ 2\ 1\ 5\ 4\ 6\ 7\ 3 \end{pmatrix}$ **ii)** $\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 \\ 3\ 1\ 2\ 5\ 7\ 4\ 6 \end{pmatrix}$

2) Aşağıdaki permütasyonları ayrık devirlerin çarpımı olarak yazınız.

i) (1234)(253) **ii)** (123456)(3456)

3) $\alpha = (137)(2578) \in S_{10}$ ise α^{-1} yi bulunuz.

4) $\alpha = (1257)$ ve $\beta = (246) \in S_7$ ise $\alpha\beta\alpha^{-1}$ yi bulunuz.

5) $\alpha = (1357)$ ve $\beta = (248)(136) \in S_8$ ise $\alpha\beta\alpha^{-1}$ yi bulunuz.

6) $(1\ 2\ \dots n-1\ n)^{-1} = (n\ \ n-1\ \dots 2\ 1)$ olduğunu gösteriniz.

7) a) $f = (1234),\ g = (12)(34)$ ise fgf^{-1} yi belirleyiniz.

b) $f = (13),\ g = (132)(24)$ ise fgf^{-1} yi belirleyiniz.

8) Aşağıdaki permütasyonların mertebeseni bulunuz.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

9) Her transpozisyonun tersi kendisine eşit olduğunu gösteriniz.

10) S_9 da kaç tane 4-lü devir vardır?

11) $\alpha = (12)(368)(4578) \in S_9$ un tek veya çift permütasyon olup olmadığına karar veriniz.

12) $\alpha, \beta \in S_n$ olsun. β çift permütasyon ise $\alpha\beta\alpha^{-1}$ de çift, β tek permütasyon ise $\alpha\beta\alpha^{-1}$ de tektir. İspatlayınız.

13) A_4 kümesinin elemanlarını yazınız. A_4 ün eleman sayısını belirleyiniz ve S_4 grubunun eleman sayısı ile arasındaki ilişkiyi inceleyiniz.

14) *S* sonlu küme olmak üzere *S* den *S* ye bir fonksiyonun birebir olması için gerek yeter koşulun bu fonksiyonun örten olmasıdır. Gösteriniz. *S* sonsuz küme ise doğru mudur ?

15) Bir dikdörtgenin köşe noktaları üzeride tanımlı bütün dönme ve simetri fonksiyonlarının bileşke işlemine göre grup olduğunu gösteriniz.