ÖDEV SORULARI

BÖLÜM 1: HALKALAR ve ALT HALKALAR

1) R bir toplamsal değişmeli grup olsun. R den alınan her iki elemanın çarpımı sıfır olacak şekilde bir çarpma tanımlayalım. Bu durumda R bu iki işlem ile bir halka yapısı oluşturur. Gösteriniz. (Bu halka sıfır halka olarak isimlendirilir)

2) R halkası üzerinde tanımlı iki işlem eşit (yani $\forall a, b \in R$ için $a + b = ab$) ise $R = \{0_R\}$ olur. Gösteriniz. (Bu durumda halkaya trivial halka denir)

3) R birimli halkası için aşağıdakileri gösteriniz.
   i) Çarpımsal birim eleman 1_R tektir.
   ii) $a \in R$ nin tersi var ise tektir.
   iii) $a \in R$ tersi olan bir eleman ise $-a$ da tersi olan bir elemandır.
   iv) $a \in R$ bir sıfır bölen eleman ise tersi yoktur.

4)
   i) X kümesi birden fazla eleman içeren bir küme olmak üzere X in boştan farklı her has alt kümesinin $P(X)$ halkasında bir sıfır bölen olduğunu gösteriniz.
   ii) R bir halka ve $n > 1$ olmak üzere R nin sıfır böleni olmadığı halde $M_n(R)$ halkasının da sıfır böleni olabilir, bir örnekle gösteriniz.

5) R birimli ve sıfır bölensiz bir halka olsun. $\forall a, b \in R$ için aşağıdakileri gösteriniz.
   i) $ab = 1_R$ dir gerek ve yeter koşul $ba = 1_R$ dir.
   ii) $a^2 = 1_R$ ise $a = 1_R$ veya $a = -1_R$ dir.

6) R bir halka ve $n \in Z^+$ olmak üzere $a, b \in R$ için a, b elemanları değişmeli eleman olsun. (yani $ab = ba$) Bu durumda genel binom katsayısı $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ olmak üzere aşağıdaki eşitliği gösteriniz.

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

7) R bir halka olmak üzere aşağıdakileri gösteriniz.

i) R nin sıfırdan farklı idempotent elemanı nilpotent olamaz.

ii) Her sıfırdan farklı nilpotent eleman bir sıfır bölen elemandır.

8) R bir tamlık bölgesi olmak üzere aşağıdakileri gösteriniz.

i) Tek nilpotent elemanı sıfır elemanıdır.

ii) Çarpımsal birim elemanı tek sıfırdan farklı idempotent elemanıdır.

9) R birimli bir halka ve $a \in R$ nilpotent eleman olsun. Bu durumda $a^n = 0_R$ ve $n > 0$ olmak üzere aşağıdaki eşitliği gösteriniz.

$$(1_R + a)^{-1} = 1_R - a + a^2 = \cdots + (-1_R)^{n-1} a^{n-1}$$

10) R bir halka ve $a \in R$ olsun. $M(a) = \{r \in R: ar = ra\}$ olmak üzere

i) $M(a)$ kümesi R nin bir alt halkası olur.

ii) $M(R) = \bigcap_{a_i \in R} M(a_i)$ dir.

11) Birimli her halkanın alt halkaları da birimli midir? Gösteriniz.

12) R bir halka ve I da onun ideali olsun. Bu durumda

$$C(I) = \{r \in R: \text{Her } a \in R \text{ için } ra - ar \in I\}$$

kümesinin R nin bir alt halkası olduğunu gösteriniz.

13) R bir halka ve $\emptyset \neq T \subseteq R$ olsun. O halde

$$< T >= \bigcap \{S_i \,:\, T \subseteq S_i \text{ olmak üzere } S_i \text{ alt halka}\}$$

kümesi T yi kapsayan en küçük alt halkadır. (Yani T nin ürettiği alt halkadır) Gösteriniz.

14) R bir halka ve $n \in Z^+$ olsun. Bu durumda

$$S_n = \{a \in R : n^k a = 0_R \text{ olacak şekilde } k > 0 \text{ vardır.}\}$$

kümesinin R de bir alt halka olup olmadığını gösteriniz.

15) R birimli bir halka ve S de onun bir alt halkası olsun. Her hangi $a \notin S$ için $S \cup \{a\}$ kümesinin ürettiği alt halkayı $< S, a >$ ile gösterelim. Eğer $a \in M(R)$ ise

$$< S, a >= \{r_0 + r_1 a + \cdots + r_n a^n : n \in Z^+ \text{ ve } r_{i \in \{1,2,\dots,n\}} \in S\}$$

olduğunu gösteriniz.