11. Cauchy Teoremi ve p-Gruplar

Bu bölümde Lagrange teoreminin tersinin doğru olduğu bir özel durumu inceleyeceğiz. Bu teorem **Cauchy** tarafından ispatlanmıştır. İlk olarak bu teoremi sonlu değişmeli gruplar için ispatlayıp daha sonra herhangi sonlu gruba genişleteceğiz.

Lemma 11.1. p bir asal sayı ve p/n olmak üzere sonlu değişmeli *G* grubunun mertebesi *n* olsun. Bu halde *G* nin mertebesi *p* olan (ve böylece mertebesi *p* olan) alt grubu vardır.

İspat. İspatı *G* nin mertebesi üzerinden yapacağız. *G* nin mertebesi *p* asal sayısı ise *G* nin birimden farklı tüm elemanlarının mertebesi *p* dir. Bu halde teorem $|G| = 2$ için doğrudur. Şimdi $2 \leq r < n$ olmak üzere tüm *r* mertebeli gruplar için lemma nın doğru olduğunu kabul edelim. *G* grubunun mertebesi *n* olsun. $e \neq a \in G$ ve $|a| = m$ olsun. Bu halde p/m veya *p* asal sayısı *m* yi bölmez. İlk durumda $m = pk$ olacak şekilde *k* tam sayısı vardır. Böylece $(a^k)^p = a^m = e$ dir. Yani $a^k \neq e$ ve a^k nın mertebesi *p* dir. Şimdi ikinci durumu göz önüne alalım. *G* değişmeli grup olduğu için $H = \langle a \rangle$, G nin normal alt grubudur. Şu halde $|G| = m[G{:}H]$ dır. p asal sayısı *m* yi bölmediğinden $p/[G{:}H]$ dır. $\left|{}^{G}/_{H}\right| < n$ olduğundan tümevarım hipotezinden $|bH| = p$ olacak şekilde $bH \in {}^{G}/_{H}$ vardır. Bundan dolayı $b^pH = (bH)^p = H$ ve böylece $b^p \in H$ dır. Böylece $(b^m)^p = (b^p)^m = e$ dir. Bundan dolayı $b^m = e$ veya $|b^m| = p$ dir. Fakat $b^m = e$ olsaydı $(bH)^m = H$ ve böylece p/m çelişkisi oluşurdu. Sonuç olarak $|b^m| = p$ ve b^m istenen elemandır.

Teorem 11.2.$(\boldsymbol{Cauchy})$ p bir asal sayı ve p/n olmak üzere sonlu *G* grubunun mertebesi *n* olsun. Bu halde *G* nin mertebesi *p* olan bir elemanı, ve böylece mertebesi *p* olan alt grubu vardır.

İspat. İspatı *n* üzerinden tümevarımla yapacağız. $n = 2$ ise *G* değişmelidir ve Lemma 11.2 den ispat elde edilir. Şimdi $2 \leq m < n$ olacak şekilde mertebesi *m* olan tüm gruplar için sonucun doğru olduğunu kabul edelim.

$$|G| = |M(G)| + \textstyle\sum_{a \notin M(G)} \big(G{:}M(a)\big) \qquad (*)$$

denklemini göz önüne alalım. $G = M(G)$ ise G değişmelidir ve böylece sonuç Lemma 11.1 den elde edilir. $G \neq M(G)$ ise $a \notin M(G)$ olacak şekilde $a \in G$ vardır. Bundan dolayı $G \neq M(a)$ ve böylece $[G: M(a)] > 1$ dir. Langrange teoreminden

$$|G| = [G: M(a)]|M(a)| > |M(a)|$$

dır. $p/M(a)$ ise tümevarım hipotezinden $M(a)$ nın ve böylece G nin mertebesi p olan elemanı vardır. Her $a \notin M(G)$ için $p, |M(a)|$ yı bölmüyorsa her $a \notin M(G)$ için $p, [G: M(a)]$ yı böler. Fakat $(*)$ denkleminden $p/M(G)$ dir . $M(G)$ değişmeli Lemma 11.1 den mertebesi p olan $a \in M(G)$ ve böylece $a \in G$ vardır.

Şimdi Cauchy teoremini uygulayarak Langrange teoreminin tersinin sonlu değişmeli gruplar için doğru olduğunu ispatlayalım.

Teorem 11.3 G mertebesi n olan sonlu değişmeli grup olsun. Eğer m pozitif tam sayısı için m/n ise G nin mertebesi m olan alt grubu vardır.

İspat. $m = 1$ ise $\{e\}$ mertebesi m olan istenilen alt gruptur. $n = 1$ ise $m = n = 1$ dir ve sonuç kolayca elde edilir. Şimdi $m > 1,\ n > 1$ kabul edip n üzerinden tümevarımla ispatı yapalım. Eğer $n = 2$ ise $m = 2 = n$ dir ve G mertebesi m olan istenilen alt gruptur. Şimdi $2 \leq k < n$ olmak üzere mertebesi k olan tüm sonlu değişmeli gruplar için teoremin doğru olduğunu kabul edelim. p bir asal sayı ve p/m olsun. Şu halde $m = pm_1$ olacak şekilde m_1 tamsayısı vardır. Cauchy teoreminden G nin mertebesi p olan bir alt grubu vardır. G değişmeli olduğundan H bir normal alt gruptur ve ${}^{G}/_{H}$ bir gruptur. Ayrıca

$$1 \leq \left|{}^{G}/_{H}\right| = \frac{|G|}{|H|} < |G|$$

Ve $\left|{}^{G}/_{H}\right| = \frac{n}{p}$ dir. Bir m_2 pozitif tam sayısı için $n = mm_2$ olduğundan $\left|{}^{G}/_{H}\right| = \frac{pm_1m_2}{p} = m_1m_2$ dir. Böylece m_1 in $\left|{}^{G}/_{H}\right|$ yı böldüğünü görürüz. Tümevarım hipotezinden K, G nin alt grubu ve $\left|{}^{K}/_{H}\right| = m_1$ olacak şekilde ${}^{G}/_{H}$ nin ${}^{K}/_{H}$ alt grubu vardır. Bu halde $|K| = \left|{}^{K}/_{H}\right||H| = m_1p = m$ dir. Sonuç olarak K, G grubunun mertebesi m olan alt grubudur.

Tanım 11.4. *p* bir asal sayı olsun. *G* grubunun tüm elemanlarının mertebesi *p* nin bir kuvveti ise *G* ye ***p*-grup** denir. *G* nin bir *H* alt grubu *p*-grup ise *H* ye *G* nin ***p*-alt grubu** denir.

Örnek 11.5. Karenin simetriler grubu ve Klein 4-lü grubu *2*-gruptur. Gerçekten, mertebesi p^n olan her grubun elemanlarının mertebesi grubun mertebesini böleceğinden bir *p*-gruptur.

Teorem 11.6 ile bir sonlu grubun *p*-grup olması için gerek ve yeter şartı belirleyeceğiz.

Teorem 11.6. *G* trivial olmayan bir grup olsun. *G* nin sonlu *p*-grup olması için gerek ve yeter koşul bir *k* pozitif tam sayısı için $|G| = p^k$ olmasıdır.

İspat. *G* sonlu *p*-Grup olsun. Bir $q \neq p$ asal sayısı için $q/|G|$ ise Cauchy teoreminden *G* nin mertebesi *q* olan alt grubu vardır. Bu ise *G* nin *p*-Grup olması ile çelişir. Böylece $|G|$ nin tek asal böleni *p* dir. Yani bir *k* tamsayısı için $|G| = p^k$ dır. Tersine Lagrange teoreminden *G* nin her elemanının mertebesi *p* nin kuvvetidir.

Örnek 11.7. *G* bir değişmeli grup ve *H* ile *K* da alt grupları olsunlar. $|H| = m, |K| = n$ ve $d = ekok(m, n)$ olsun. Bu halde *G* nin *d* mertebeden alt grubu vardır.

Çözüm. *G* değişmeli grup olduğu için $HK < G$ ve *H* ile *K* sonlu olduğundan *HK* da sonludur. *H* ile *K* , *HK* nın alt grupları olduğundan $m/|HK|$ ve $n/|HK|$ ve böylece $d/|HK|$ dır. Bu halde *HK* sonlu değişmeli grup ve $d/|HK|$ olduğundan *HK* nın ve böylece *G* nin mertebesi *d* olan alt grubu vardır.

Örnek 11.8. Z_{12} nin *2*-alt grupları $\{\overline{0}, \overline{6}\}$ ve $\{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$ dur. Z_{12} nin *3*-alt grubu ise $\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$ dir.

Örnek 11.9. A_4 grubunun *2*-alt grupları $\langle(12)(34)\rangle$, $\langle(13)(24)\rangle$, $\langle(14)(23)\rangle$ ve $\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ dür.

Sorular

1. Mertebesi 28 olan grupta mertebesi 7 olan kaç tane eleman vardır ?

2. Mertebesi 15 olan grubun değişmeli olduğunu gösteriniz.

3. *p* bir asal sayı ve *n* bir pozitif tam sayı olmak üzere *G* grubunun mertebesi p^n olsun. *G* grubunun mertebesi $p^i (0 \leq i \leq n)$ olan bir alt grup içerdiğini gösteriniz.

4. G, mertebesi 35 olan bir grup ise devirli midir? Neden?

5. Mertebesi 36 olan her değişmeli grubun mertebesi 6 olan bir eleman içerdiğini gösteriniz.

6. *p* bir asal sayı ve $p > n$ olmak üzere *G* grubunun mertebesi pn olsun. *G* nin mertebesi *p* olan normal alt grubunun olduğunu gösteriniz.

7. *p* ve *q* farklı asal sayılar olmak üzere *G* mertebesi *pq* olan değişmeli grup olsun. *G* nin devirli olduğunu gösteriniz. $p = q$ ise sonuç yine aynı mıdır?

8. Herhangi *p* asal sayısı için p^2 mertebeli herhangi grubun ya devirli yada devirli grupların direkt çarpımı olduğunu gösteriniz.

9. Mertebesi 81 olan her grubun 3 elemandan daha fazla içeren trivial olmayan normal alt grup içerdiğini gösteriniz.

10. *G* mertebesi 99 olan grup olsun. Aşağıdakileri ispatlayınız.

i) *G* nin mertebesi 11 olan tek bir *H* normal alt grubu vardır.

ii) $H \subseteq M(G)$

iii) *G* nin mertebesi 33 olan bir elemanı vardır.

11. Mertebesi 14 olan her grubun mertebesi 7 olan sadece bir tane normal alt grup içerdiğini gösteriniz.