10. DİREKT ÇARPIMLAR

Teorem 10.1. $H_1, H_2, \dots, H_n$ bir G grubunun alt gruplarının bir ailesi ve $H = H_1H_2\dots H_n$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

a) $(x_1, x_2, \dots, x_n) \to x_1x_2\dots x_n$ dönüşümü altında $H_1 \mathrm{x} H_2 \mathrm{x} \dots \mathrm{x} H_n \cong H$ dır.

b) $H_i \lhd H (1 \le i \le n)$ ve $x_i \in H$ olmak üzere her $x \in H$ yi tek türlü olarak $x = x_1x_2\dots x_n$ olarak ifade edebiliriz.

c) $H_i \lhd H (1 \le i \le n)$ ve $x_1x_2\dots x_n = e$ ise $x_i = e (1 \le i \le n)$ dir.

d) $H_i \lhd H (1 \le i \le n)$ ve $H_i \cap (H_1H_2\dots H_{i-1}H_{i+1}\dots H_n) = \{e\}$ $(1 \le i \le n)$ dir.

İspat. **a) ⇒b)** $H_i^* = \{(e, \dots, h_i, \dots, e) : h_i \in H_i\}$ olsun. $H_i^* \lhd H_1 \mathrm{x} H_2 \mathrm{x} \dots \mathrm{x} H_n$ olduğu açıktır. Ayrıca verilen dönüşüm altında $H_i^* \cong H_i$ dir. Böylece $H_i \lhd H_1H_2\dots H_n$ olduğu görülür. $x_i, x_i^* \in H_i$ olmak üzere $x = x_1x_2\dots x_n = x_1^*x_2^*\dots x_n^*$ olsun. Böylece verilen izomorfizma altında $(x_1, \dots, x_n)$ ve $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ elemanlarının görüntüleri eşittir. Bundan dolayı, $x_i = x_i^*$ $(1 \le i \le n)$ olduğu görülür.

b) ⇒ c) $x_1x_2\dots x_n = e$ olsun. Aynı zamanda, $e\dots e = e$ olduğundan tek türlü yazılışdan $x_i = e (1 \le i \le n)$ elde ederiz.

c) ⇒d) Hipotezden her $i \ne j$ için $H_i \cap H_j = \{e\}$ olduğu görülür. Gerçekten $x_i \in H_i$,$x_j \in H_j$ olmak üzere $x_i = x_j$ olsun. Böylece $e = x_ix_j^{-1}$ olduğundan varsayımımızdan $x_i = e$ ve $x_j^{-1} = e$ elde ederiz. Bundan dolayı $H_i, H_j \lhd H$ olduğundan her $x \in H_i$ ve her $y \in H_j$ için $xy = yx$ dir. Şimdi **d)** yi ispatlamak için $x_i \in H_i (1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{n})$ olmak üzere $x_i = x_1\dots x_{i-1}x_{i+1}\dots x_n$ olduğunu kabul edelim. Şu halde tüm $x_i \in H_i$ ler değişmeli olduğundan $e = x_1\dots x_{i-1}\mathrm{x}_\mathrm{i}^{-1}x_{i+1}\dots x_n$ elde ederiz. Sonuç olarak **c)** den $x_i = e$ elde edilir.

d)⇒ $\boldsymbol{a}$) $i \ne j$ olmak üzere her $x_i \in H_i$ ve her $x_j \in H_j$ için $xy = yx$ dir. Şu halde $f\big((x_1, x_2, \dots, x_n)\big) = x_1x_2\dots x_n$ ile $f : H_1 \mathrm{x} H_2 \mathrm{x} \dots \mathrm{x} H_n \to \mathrm{H}$ dönüşümünü tanımlayalım. Buradan f nin homomorfizma olduğunu kolayca görebiliriz. Ayrıca f bire-bir dir. Gerçekten, $x_1x_2\dots x_n = e$ olsun. Böylece $x_1^{-1} = x_2x_3\dots x_n$ olur. Varsayımımızdan $x_1^{-1} = e$ ve böylece $x_1 = e$ dir. Benzer şekilde $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = e$ olduğunu görebiliriz. Dönüşümün örten olduğu açıktır.

Teorem 10.1 in denk olan koşullarından herhangi biri sağlandığında H ye $H_1, H_2, \dots, H_n$ nin **iç direkt çarpımı** denir. Teorem 10.1 koşullarından biri sağlandığında $H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n \cong H_1H_2\dots H_n$ olduğundan iç direkt çarpım ile dış direkt çarpım arasında fark yoktur. Böylece $H_1, H_2, \dots, H_n$ alt grupları Teorem 10.1 in şartlarından biri ni sağlandığında "iç" veya "dış" kelimesini ihmal edebiliriz. Fakat $H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$ dış direkt çarpım her zaman olmasına rağmen iç direkt çarpım $H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n \to H_1 H_2 \ldots H_n$ izomorfizması olması durumunda vardır.

Eğer gruplar toplamsal grup ise G nin $H_1, H_2, \ldots, H_n$ alt gruplarının (iç)direkt toplamı $H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_n$ ile gösterilir ve $H_1, H_2, \ldots, H_n$ nin direkt toplamı denir.

Örnek 10.2. Z_{10} grubu $H = \{\bar{0}, \bar{5}\}$ ve $K = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ alt gruplarının direkt toplamıdır. Gerçekten, $Z_{10} = H + K$ ve $H \cap K = \{0\}$ olduğundan $Z_{10} = H \oplus K$ dır.

Örnek 10.3. *G* birim hariç tüm elemanlarının mertebesi 2 olan sonlu bir grup ise $|G| = 2^n$ ve C_i ler mertebesi 2 olan devirli gruplar olmak üzere $G \cong C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_n$ dir.

Çözüm. Her $x \in G$ için $x^2 = e$ olduğundan $x = x^{-1}$ dir. Böylece her $a, b \in G$ için $ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$ dır. Şimdi $e \neq a_1 \in G$ olduğunu kabul edelim. Böylece $G = \langle a_1 \rangle$ veya $\langle a_1 \rangle \subsetneq G$ dir. İkinci durumda $a_2 \notin \langle a_1 \rangle$ olacak şekilde $a_2 \in G$ vardır. Böylece $\langle a_1 \rangle \langle a_2 \rangle$ çarpımı direkt tir. Eğer $G = \langle a_1 \rangle \langle a_2 \rangle$ ise istenilen elde edilir. Aksi takdirde $\langle a_1 \rangle \subsetneq \langle a_1 \rangle \langle a_2 \rangle \subsetneq G$ elde ederiz. Bu şekilde devam edersek $G = \langle a_1 \rangle \langle a_2 \rangle \ldots \langle a_n \rangle$ nin mertebesi 2 olan devirli grupların direkt çarpımı olduğunu görebiliriz.

Örnek 10.3. *G* mertebesi *4* olan bir grup ise ya devirlidir veya mertebesi 2 olan iki devirli grubun direkt çarpımına izomorftur.

Çözüm. *G* devirli grup değil ise Langrange teoreminden mertebesi 2 olan bir *a* elemanı ve mertebesi 2 olan diğer *b* elemanı içerir. Şu halde $G \cong \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ dir.

Örnek 10.4. D_4 grubu iki öz alt grubunun iç direkt çarpımı olarak yazılamaz.

Çözüm. *H* ve *K* nın D_4 grubunun öz alt grupları olduklarını ve $D_4 = H \times K$ olduğunu kabul edelim. Şu halde *H* ve *K* grupları D_4 grubunun normal alt gruplarıdır. Ayrıca $|H| = 4, |K| = 2$ veya $|H| = 2, |K| = 4$ olur. Şimdi $|H| = 4$ ve $|K| = 2$ olduğunu kabul edelim. Şu halde *H* ve *K* değişmelidir. Yani D_4 değişmeli gruptur. Fakat D_4 değişmeli grup değildir.

Örnek 10.5. $(m, n) = 1$ olmak üzere $G = \langle a \rangle$, *mn.* mertebeden devirli grup ise $G \cong Z_m \times Z_n$ dir.

Çözüm. $H = \langle a \rangle$ ve $K = \langle b \rangle$ olsun. Bu halde *H* ve *K*, *G* nin sırasıyla *m.* ve *n.* mertebeden alt gruplarıdır. Ayrıca $H \cap K = \{e\}$ dir. Gerçekten, $a \in H \cap K \Rightarrow o(a)/m$ ve $o(b)/n$ $\Rightarrow (m, n) = 1$ olduğundan $o(a) = 1 \Rightarrow a = e$ dir. Böylece $HK < G$ ve $H \cap K = \{e\}$ olduğundan $o(HK) = o(H)o(K) = mn = o(G)$ ve $G = HK$ elde ederiz. Teorem 10.1 den $G \cong Z_m \times Z_n$ sonucunu elde ederiz.

Örnek 10.6. 15 modülü ile aralarında asal pozitif kalanların kümesi $Z_{18}^{*} = \{1,2,4,7,8,11,13,14\}$ kümesi mertebesi 8 olan bir değişmeli grup belirtir. Bu grup, 2 ve 11 elemanlarının ürettiği devirli grupların direkt çarpımına izomorftur.

İspat: $H =< 2 > = \{1,2,4,8\}$ ve $K =< 11 > = \{1,11\}$ diyelim.

Bütün olası çarpımların kümesi $HK = \{1,2,4,8,11,22,44,88\} = \{1,2,4,7,8,11,13,14\} = G$ ve $H \cap K = \{1\}$ sağlandığını görüyoruz. O halde bu grup $H \times K$ ya izomorftur.

Teorem 10.7 de sonlu üretilmiş grupları karakterize edeceğiz. İyi sıralılık prensibini kullanarak sonlu üretilmiş grupların üreteçleri arasında minimal üreteci bulabiliriz. Böyle kümelere **minimal üreteç kümeleri** denir. Bir *G* grubunun bir minimal üreteç kümesindeki eleman sayısına *G* nin **rankı** denir ve ***r(G)*** ile gösterilir..

Teorem 10.7. (Sonlu Üretilmiş Abelyen Grupların Temel Teoremi) *G* sonlu üretilmiş değişmeli bir grup olsun. Bu halde *G* sonlu tane C_i devirli grubun direkt toplamı olarak yazılabilir. Daha açık olarak, $C_1, C_2, \dots, C_k$ lerin hepsi sonsuz **veya** $C_1, C_2, \dots, C_j (j \leq k)$ lerin mertebeleri $m_1/m_2 / \dots /m_j$ olacak şekilde sırasıyla $m_1, m_2, \dots, m_j$ ve $C_{j+1}, \dots, C_k$ sonsuz devirli grup olmak üzere $G = C_1 \oplus C_2 \oplus \dots \oplus C_k$ olarak yazabiliriz.

İspat. *G* grubunun rankı üzerinden tümevarım uygulayalım. $r(G) = 1$ ise *G* devirli grup olacağından teorem doğrudur. $k > 1$ olduğunu kabul edelim ve teoremin $r(G) = k - 1$ olan her grup için doğru olduğunu kabul edelim. İki durum söz konusudur.

Durum 1. *G* grubunun $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ tarafından üretildiğini ve her $x_1, x_2, \dots, x_k$ tam sayıları için $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_k a_k = 0$ olması $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$ olmasını gerektirsin. Bu halde her $a \in G$ yi $a = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_k a_k$ şeklinde tek türlü yazabiliriz. Gerçekten,

$$a = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_k a_k = a = x_1^* a_1 + x_2^* a_2 + \cdots + x_k^* a_k$$

İse

$$(x_1 - x_1^*)a_1 + (x_2 - x_2^*)a_2 + \cdots + (x_k - x_k^*)a_k = 0$$

olduğundan $x_i = x_i^*(i = 1,2,\dots,k)$ dır. Böylece teorem 10.1 den C_i $(i = 1,2,\dots,k)$ ler $a_i(i = 1,2,\dots,k)$ tarafından üretilmiş devirli gruplar olmak üzere $G = C_1 \oplus C_2 \oplus \dots \oplus C_k$ dır. Ayrıca, $x_i a_i = 0$ olması $x_i = 0$ olmasını gerektirdiğinden her bir C_i sonsuz devirli gruptur. Bu durumda G grubu sonsuz devirli grupların bir sonlu direkt toplamıdır.

Durum 2. Durum 1 sağlanmasın. Yani, G grubunun herhangi $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ üreteç kümesi için $x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_ka_k = 0$ olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $x_1, x_2, \dots, x_k$ tam sayıları bulunsun. Ayrıca $\sum x_i\, a_i = 0$ olması $\sum(-x_i)\, a_i = 0$ olmasını gerektirdiğinden bir *i* için $x_i > 0$ kabul edebiliriz. Şimdi *G* grubunun *k* elemanlı tüm üreteçlerini göz önüne alalım ve

$X = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) : G \text{ nin bir } \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \text{ üreteci için } x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_ka_k = 0 \text{ ve bir } i \text{ için } \mathrm{x_i} > 0\}$ olsun. *X* deki *k*-lı ların bileşenlerindeki en küçük pozitif tam sayı m_1 olsun. Genelliği bozmadan m_1 ilk bileşende olsun. Böylece, bir $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ üreteci için

$$m_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_ka_k = 0 \qquad (1)$$

olur. Bölme algoritmasından her bir $i = 1,2,\dots,k$ için $0 \le r_i < m_1$ olmak üzere $x_i = q_im_1 + r_i$ yazabiliriz. Bu halde (1) den $b_1 = a_1 + q_2a_2 + \cdots + q_ka_k$ olmak üzere

$$m_1b_1 + r_2a_2 + \cdots + r_ka_k = 0 \qquad (2)$$

yazabiliriz. Burada $b_1 \neq 0$ dır. Gerçekten, $b_1 = 0$ olsaydı $a_1 = -q_2a_2 - \cdots - q_ka_k$ olurdu. Bu ise G nin *k-1* eleman tarafından üretildiğini gösterir. Bu ise varsayımımızla çelişir. Ayrıca $a_1 = b_1 - q_2a_2 - \cdots - q_ka_k$ dır. Böylece $\{b_1, a_2, \dots, a_k\}$, *G* nin bir üreteç kümesidir. Fakat m_1 minimal olduğundan (2) den $r_2 = r_3 = \cdots = r_k = 0$ dır. Bu halde $m_1b_1 = 0$ dır. $C_1 = \langle b_1 \rangle$ dersek $m_1b_1 = m_1b_1 + 0a_2 + \cdots + 0a_k = 0$ olacak şekilde en küçük tamsayı m_1 olduğundan C_1 mertebesi m_1 olan devirli alt gruptur.

A_1 in $\{a_2, a_3, \dots, a_k\}$ tarafından üretilen alt grup olduğunu kabul edelim ve $G = C_1 \oplus A_1$ olduğunu gösterelim. Şimdi $0 \le x_1 < m_1$ olmak üzere $x_1b_1 \in A_1$ olduğunu kabul edelim. Böylece $x_2, x_3, \dots, x_k \in Z$ olmak üzere $x_1b_1 = x_2a_2 + \cdots + x_ka_k$ dır. Bundan dolayı m_1 in minimal oluşundan $x_1b_1 - x_2a_2 - \cdots - x_ka_k = 0$ olması $x_1 = 0$ olmasını gerektirir. Yani $C_1 \cap A_1 = 0$ olduğundan $G = C_1 \oplus A_1$ elde ederiz.

A_1 alt grubunun *k-1* tane eleman tarafından üretildiğini biliyoruz. A_1 alt grubu *k-1* elemandan daha az elemanla üretilemez. Eğer üretilseydi *G* grubu k elemandan daha az elemanla üretilirdi. Bu ise varsayımımızla çelişir. Böylece tümevarım hipotezinden **ya** $C_2, \dots, C_k$ sonsuz devirli gruplar **veya** $C_2, \dots, C_j$ $(j \leq k)$ mertebeleri sırasıyla $m_2 / m_3 \dots / m_j$ olacak şekilde $m_2, m_3, \dots, m_j$ tam sayıları ve $C_i (i > j)$ sonsuz alt grup olmak üzere

$$A_1 = C_2 \oplus C_3 \oplus \dots \oplus C_k$$

yazabiliriz.

$i = 2,3, \dots, k$ olmak üzere $C_i = \langle b_i \rangle$ ve C_2 nin mertebesi m_2 olsun. Böylece $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$, *G* grubunu üretir ve

$$m_1 b_1 + m_2 b_2 + 0 b_3 + \cdots + 0 b_k = 0$$

dır. (1) deki eşitlik için yaptığımız tartışmayı tekrarlıyarak m_1 / m_2 olduğunu görebiliriz. Böylece teoremi ispatlamış oluruz.

Sorular

1) Z_4 toplamsal grubunun mertebesi 2 iki olan iki alt grubunu direkt toplamı olarak yazılamayacagını gösteriniz.

2) Z_8 grubunun iki aşikar olmayan alt grubunun direkt toplamı olarak yazılamayacagını gösteriniz.

3) Z toplamsal grubunun iki aşikar olmayan alt grubunun direkt toplamı olarak yazılamayacagını gösteriniz.

4) *Q* toplamsal grubunun iki aşikar olmayan alt grubunun direkt toplamı olarak yazılamayacagını gösteriniz.

5) Z_{12} devirli grubu iki öz alt grubunun direkt toplamı olarak yazılabilirmi?

6) S_3 grubunun iki öz alt grubunun direkt çarpımı olarak yazılamıyacagını gösteriniz.