1. GRUPLAR

Sorular ve Çözümleri

1) G bir grup olmak üzere aşağıdaki eşitlikleri gösteriniz**.**

i) $e \in G$ birim eleman olmak üzere $e^{-1} = e$.

ii) $a \in G$ olmak üzere $(a^{-1})^{-1} = a$.

iii) $\forall\, a_1, a_2, \dots, a_n \in G$ için $(a_1 a_2 \dots a_n)^{-1} = a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \dots a_1^{-1}$.

Çözüm.

i) $ee = e$ olduğundan $e^{-1} = e$ olur.

ii) $a(a^{-1}) = (a^{-1})a = e$ olduğundan $(a^{-1})^{-1} = a$ dır.

iii) $\forall\, a_1, a_2, \dots, a_n \in G$ için $(a_1 a_2 \dots a_n)(a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \dots a_1^{-1}) = a_1 a_2 \dots (a_n a_n^{-1}) a_{n-1}^{-1} \dots a_1^{-1} = e$ ve $(a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \dots a_1^{-1})(a_1 a_2 \dots a_n) = a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \dots (a_1^{-1} a_1) a_2 \dots a_n = e$ olduğundan $(a_1 a_2 \dots a_n)^{-1} = a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \dots a_1^{-1}$ eşitliği gösterilmiş olur.

2) Aşağıdaki kümelerin verilen işlem altında bir grup olup olmadığını belirleyiniz.

i) Z tamsayılar kümesi ve $G = \{2n : n \in Z\}$ olmak üzere $(G, +)$,

ii) $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve $a.b = a + b + 1$ olmak üzere $(\mathbb{R}, .)$,

iii) $\mathbb{R}^+$ pozitif reel sayılar kümesi $a * b = \sqrt{ab}$ olmak üzere $(\mathbb{R}^+, *)$.

Çözüm.

i) Gruptur.

i) Her $2n, 2m \in G$ için $2n + 2m = 2(n + m) \in G$ (kapalılık)

ii) Her $2n, 2m, 2k \in G$ için $(2n + 2m) + 2k = 2\big((n + m) + k\big) = 2\big(n + (m + k)\big) = 2n + (2m + 2k)$ (birleşme)

iii) Her $2n \in G$ için $2n + 0 = 0 + 2n = 2n$ olduğundan $0 = 2.0 \in G$ birim elemandır.

iv) Her $2n \in G$ için $2n + (-2n) = (-2n) + 2n = 0$ olduğundan $(2n)^{-1} = (-2n) = 2(-n) \in G$ ters eleman olarak bulunur. Şu halde $(G, +)$ bir gruptur.

ii) Gruptur.

i) Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $a.b = a + b + 1 \in \mathbb{R}$ (kapalılık)

ii) Her $a, b, c \in \mathbb{R}$ için $(a.b).c = (a + b + 1) + c + 1 = a + b + c + 2 = a + (b + c + 1) + 1 = a.(b.c)$ (birleşme)

iii) Her $a \in \mathbb{R}$ için $a.e = a + e + 1 = a$ ve $e.a = e + a + 1 = a$ olacak şekilde $e = -1 \in \mathbb{R}$ birim elemandır.

iv) Her $a \in \mathbb{R}$ için $a.x = a + x + 1 = e = -1$ ve $x.a = x + a + 1 = e = -1$ olacak şekilde $a^{-1} = x = -a - 2 \in \mathbb{R}$ ters elemandır. Buradan $(\mathbb{R}, .)$ nın bir grup olduğu görülür.

iii) Değildir.

$\mathbb{R}^+$ pozitif reel sayılar kümesinde $a * b = \sqrt{ab}$ olmak üzere $(\mathbb{R}^+, *)$ bir grup oluşturmaz. Bunu ispatlamak için grup aksiyomlarından en az birinin sağlanmadığını bir örnekle göstermek yeterlidir. Örneğin $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$ için $2 * (3 * 5) = \sqrt{2\sqrt{15}}$ iken $(2 * 3) * 5 = \sqrt{5\sqrt{6}}$ olduğundan $2 * (3 * 5) \neq (2 * 3) * 5$ birleşme özelliği sağlanmaz.

3) $\mathbb{R}$ reel sayılar olmak üzere $\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$ olmak üzere

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

işlemi altında $(\mathbb{R}^n, +)$ nın bir grup olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

i) $\forall\, (a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \in \mathbb{R}^n$ (kapalılık)

ii) $\forall\, (a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n), (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$[(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)] + (c_1, c_2, \dots, c_n) = ((a_1 + b_1) + c_1, \dots, (a_n + b_n) + c_n)$
$= (a_1, a_2, \dots, a_n) + [(b_1, b_2, \dots, b_n) + (c_1, c_2, \dots, c_n)]$ (birleşme)

iii) $\forall\, (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (0, \dots, 0) = (0, \dots, 0) + (a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

gerçeklendiğinden $(0, \dots, 0)$ birim elemandır.

iv) $\forall\, (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (-a_1, \dots, -a_n) = (-a_1, \dots, -a_n) + (a_1, a_2, \dots, a_n) = (0, \dots, 0)$

sağlandığından $(a_1, a_2, \dots, a_n)^{-1} = (-a_1, \dots, -a_n)$ dir. (ters eleman)

Dolayısıyla $(\mathbb{R}^n, +)$ nın bir grup olduğu gösterilmiş olur.

4) $S = \mathbb{R} - \{-1\}$ ve $a * b = a + b + ab$ olmak üzere $(S, *)$ nin bir grup olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm.

i) Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $a * b = a + b + ab \in \mathbb{R}$ sağlanır. $a \neq -1$ ve $b \neq -1$ iken $a * b = -1$ olsa $a * b = a + b + ab = -1$ den $(a + 1)(b + 1) = 0$ olup, buradan $a = -1$

veya $b = -1$ çelişkisine varılır. O halde $a * b \in \mathbb{R} - \{-1\} = S$ olup kapalılık koşulu sağlanır.

ii) Her $a, b, c \in S$ için $(a * b) * c = (a + b + ab) + c + (a + b + ab)c = a + b + ab + c + ac + bc + abc$ ve $a * (b * c) = a + (b + c + bc) + a(b + c + bc) = a + b + c + bc + ab + ac + abc$ olduğundan birleşme özelliği sağlanmış olur.

iii) Her $a \in S$ için $a * e = a + e + ae = a$ ve $e * a = e + a + ea = a$ ise $e(1 + a) = 0$ olup, $a \neq -1$ kabulu gereğince $e = 0 \in S$ birim eleman olarak elde edilir.

iv) Her $a \in S$ için $a * t = a + t + at = e = 0$ ve $t * a = t + a + ta = e = 0$ olacak şekilde $t(a + 1) = -a$ olup $a^{-1} = t = \frac{-a}{(a+1)} \in S$ ters elemandır ($t \neq -1$ olduğu açıktır).

Böylece $(S,*)$ nin bir grup olduğu görülür.

5) $G = \{a + b\sqrt{-5} \,:\, a, b \in \mathbb{Q},\ a \neq 0 \text{ veya } b \neq 0\}$ kümesi kompleks sayılardaki çarpma işlemine göre bir gruptur. Gösteriniz.

Çözüm.

i) $\forall\, a + b\sqrt{-5}, c + d\sqrt{-5} \in G$ için $\left(a + b\sqrt{-5}\right)\left(c + d\sqrt{-5}\right) = (ac - 5bd) + (ad + bc)\sqrt{-5} \in G$

ii) ii) $G \subset \mathbb{C} - \{0\}$ ve $(\mathbb{C} - \{0\}, .)$ grubu birleşme özelliğine sahip olduğundan G de aynı işleme göre birleşme özelliğine sahiptir.

iii) $\forall a + b\sqrt{-5} \in G$ için $\left(a + b\sqrt{-5}\right)\left(1 + 0\sqrt{-5}\right) = \left(1 + 0\sqrt{-5}\right)\left(a + b\sqrt{-5}\right) = \left(a + b\sqrt{-5}\right)$ olduğundan $\left(1 + 0\sqrt{-5}\right) \in G$ birim elemandır.

iv) $\left(a + b\sqrt{-5}\right)\left(t + s\sqrt{-5}\right) = \left(1 + 0\sqrt{-5}\right)$ ve $\left(t + s\sqrt{-5}\right)\left(a + b\sqrt{-5}\right) = \left(1 + 0\sqrt{-5}\right)$ ise $\left(a + b\sqrt{-5}\right)^{-1} = \left(t + s\sqrt{-5}\right) = \frac{1}{a+b\sqrt{-5}} = \frac{a}{a^2+5b^2} + \left(\frac{-b}{a^2+5b^2}\right)\sqrt{-5} \in G$ ters eleman olarak elde edilir. Böylece G nin bir grup olduğu gösterilmiş olur.

6) $\mathbb{R}$ reel sayılar olmak üzere $(a, b) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olsun. $(x, y) \to (x + a, y + b)$ ile $T_{a,b}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dönüşümünü tanımlayalım. $T(\mathbb{R}^2) = \{T_{a,b}: a, b \in \mathbb{R}\}$ kümesinin bileşke işlemi altında bir grup olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

i) Her $T_{a,b}, T_{c,d} \in T(\mathbb{R}^2)$ için $(T_{a,b} \circ T_{c,d})(x,y) = T_{a,b}(x+c, y+d) = ((x+c) + a, (y+d)+b) = (x+(c+a), y+(d+b)) = T_{a+c,b+d}(x,y)$ olacak şekilde $T_{a+c,b+d} \in T(\mathbb{R}^2)$ dır. (kapalılık)

ii) ii) Her $T_{a,b}, T_{c,d}, T_{e,f} \in T(\mathbb{R}^2)$ için, $(T_{a,b} \circ T_{c,d}) \circ T_{e,f} = T_{(a+c)+e,(b+d)+f} = T_{a+(c+e),b+(d+f)} = T_{a,b} \circ (T_{c,d} \circ T_{e,f})$ (birleşme)

iii) Her $T_{a,b} \in T(\mathbb{R}^2)$ için $(T_{a,b} \circ T_{0,0}) = (T_{0,0} \circ T_{a,b}) = T_{a,b}$ olduğundan $T_{0,0} \in T(\mathbb{R}^2)$ birim elemandır.

iv) Her $T_{a,b} \in T(\mathbb{R}^2)$ için $(T_{a,b} \circ T_{-a,-b}) = (T_{-a,-b} \circ T_{a,b}) = T_{0,0}$ olduğundan $(T_{a,b})^{-1} = T_{-a,-b} \in T(\mathbb{R}^2)$ ters elemanı bulunur. O halde $(T(\mathbb{R}^2),\circ)$ bir grup oluşturur.

7) $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $a * b = \frac{ab}{2}$ olmak üzere $(\mathbb{Q} - \{0\},*)$ bir grup mudur ?

Çözüm.

i) Her $a, b \in \mathbb{Q} - \{0\}$ için $a * b = \frac{ab}{2} \in \mathbb{Q} - \{0\}$ (kapalılık)

ii) ii) Her $a, b, c \in \mathbb{Q} - \{0\}$ için $a * (b * c) = \frac{abc}{4} = (a * b) * c$ (birleşme)

iii) Her $a \in \mathbb{Q} - \{0\}$ için $a * 2 = 2 * a = a$ olduğundan $2 \in \mathbb{Q} - \{0\}$ birim eleman,

iv) Her $a \in \mathbb{Q} - \{0\}$ için $a * t = t * a = \frac{at}{2} = 2$ ise $a^{-1} = t = \frac{4}{a} \in \mathbb{Q} - \{0\}$ ters elemandır.

Buradan $(\mathbb{Q} - \{0\},*)$ bir gruptur.

8) Aşağıdaki kümelerin verilen işlem altında bir grup olup olmadığını belirleyiniz.

i) Matrislerde toplama işlemine göre $n \times n$ lik reel matrislerin kümesi

ii) Matrislerde çarpma işlemine göre $n \times n$ lik reel matrislerin kümesi

iii) Matrislerde çarpma işlemine göre $n \times n$ lik reel değerli köşegen matrislerin kümesi

Çözüm. $n \times n$ lik reel matrislerin kümesinin M ile gösterelim.

i) Matrislerde toplama işlemine göre $n \times n$ lik reel matrislerin kümesi :

i) Her (a_{ij}) ,$(b_{ij}) \in M$ için $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \in M$ (kapalılık)

ii) Her (a_{ij}), (b_{ij}), $(c_{ij}) \in M$ için $((a_{ij}) + (b_{ij})) + (c_{ij}) = ((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}) = (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})) = (a_{ij}) + ((b_{ij}) + (c_{ij}))$ (birleşme)

iii) Her $(a_{ij}) \in M$ için $\left(a_{ij}\right) + 0_{n\times n} = 0_{n\times n} + \left(a_{ij}\right) = \left(a_{ij}\right)$ olduğundan $0_{n\times n} \in M$ birim elemandır.

iv) Her $(a_{ij}) \in M$ için $\left(a_{ij}\right) + (-a_{ij}) = (-a_{ij}) + \left(a_{ij}\right) = 0_{n\times n}$ olduğundan $\left(a_{ij}\right)^{-1} = (-a_{ij})$ ters eleman olarak bulunur. Sonuç olarak $(M, +)$ bir grup oluşturur.

ii) $n \times n$ lik reel bir matrisin çarpma işlemine göre tersinin olması için gerek ve yeter koşul determinantının sıfırdan farklı olmasıdır. Dolayısıyla determinantı sıfır olan matrislerin tersleri yoktur. Buradan $(M, .)$ bir grup değildir. Örneğin $n = 2$ için 2×2 lik reel bir matris olan $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin tersi mevcut değildir.

iii) Benzer şekilde determinantı sıfır olan $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ köşegen matrisinin tersi mevcut olmadığından $n \times n$ lik reel değerli köşegen matrislerin kümesi bir grup oluşturmaz.

9) $SL(2, \mathbb{R}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1\}$ kümesinin matris çarpımına göre bir grup oluşturduğunu gösteriniz.

Çözüm: Bu kümeyi $SL(2, \mathbb{R}) = \{A_{2x2} : |A| = 1\}$ şeklinde yeniden yazabiliriz.

i) Kapalılık: $A, B \in SL(2, \mathbb{R})$ alalım. O halde $|A| = |B| = 1$ olur. Determinantın özelliklerinden $|AB| = |A|.|B| = 1$ ve böylece $AB \in SL(2, \mathbb{R})$ olur.

ii) Birleşme: Matrislerde çarpım birleşme özelliğine sahip olduğundan özel olarak her $A, B, C \in SL(2, \mathbb{R})$ için $A.(B.C) = (A.B).C$ olur

iii) Birim Eleman: $|I_{2x2}| = 1$ olduğundan birim matris $SL(2, \mathbb{R})$ nin elemanı olur. Birim matrisin birim eleman olduğu açıktır ($A.I = I.A = A$).

iv) Ters Eleman: $A \in SL(2, \mathbb{R})$ alalım. $|A| = 1 \neq 0$ olduğundan A nın matrislerde çarpma işlemine göre tersi vardır. A nın tersine A^{-1} diyelim. Determinant özelliklerinden $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = 1$ ve böylece $A^{-1} \in SL(2, \mathbb{R})$ dir.

10) $G = \{\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in Z\}$ kümesinin matris çarpımına göre bir grup oluşturduğunu gösteriniz. Ayrıca G deki birimden farklı her elemanın mertebesinin sonsuz olduğunu görünüz.

Çözüm:

i) Kapalılık: Her $g_1, g_2 \in G$ için $g_1.g_2 \in G$ olup olmadığını araştıralım.

$g_1, g_2 \in G$ olduğundan $g_1 = \begin{pmatrix} 1 & n_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olacak şekilde $n_1 \in Z$ vardır. Benzer şekilde

$g_2 = \begin{pmatrix} 1 & n_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olacak şekilde $n_2 \in Z$ vardır.

$g_1 . g_2 = \begin{pmatrix} 1 & n_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & n_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n_1 + n_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $n_1 + n_2 \in Z$ olduğundan $g_1 . g_2 \in G$ sağlanır.

ii) Birleşme: Her $g_1, g_2, g_3 \in G$ için $g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3$ olduğu kolayca görülebilir.

iii) Birim eleman: Her $g = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ için $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ denklemini sağlayan eleman $\begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ dir.

iv) Ters Eleman: Her $g = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ için $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ denklemini sağlayan eleman $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dir.

Şimdi birimden farklı her elemanın mertebesinin sonsuz olduğunu gösterelim: $k \in N$ olmak üzere,

her $g = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ $(n \neq 0)$ için $g^k = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & kn \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olur. Dolayısıyla her $k \in N$ için $g^k \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olacağından her elemanın mertebesinin sonsuzdur.

11) $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ grubunda $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ elemanının varsa tersini bulunuz.

Çözüm:

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ olduğundan tersi vardır. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ elemanı $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ nin birim elemanı olduğundan $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ denklemi çözüldüğünde verilen elemanın tersi $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ olarak bulunur.

12) $G = \{(a, b, 3):\ a, b \in Z\}$ kümesinin $(a, b, 3) * (c, d, 3) = (a + c, b + d, 3)$ ikili işlemi ile birlikte bir değişmeli grup olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Grup olduğu Çözüm 3 e benzer olarak kolayca yapılabilir. Değişmeli olduğunu gösterelim :

Her $g_1, g_2 \in G$ için $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$ olduğunu gösterelim.

$g_1 \in G$ olduğundan $g_1 = (a_1, b_1, 3)$ olacak şekilde $a_1, b_1 \in Z$ vardır. Benzer şekilde $g_2 \in G$ olduğundan $g_2 = (a_2, b_2, 3)$ olacak şekilde $a_2, b_2 \in Z$ vardır.

$$g_1 * g_2 = (a_1, b_1, 3) * (a_2, b_2, 3) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, 3)$$

$= (a_2 + a_1, b_2 + b_1, 3) = (a_2, b_2, 3) * (a_1, b_1, 3) = g_2 * g_1$ olduğundan değişmelidir.

13) $\mathrm{G} = Z \times Z = \{(a, b): a, b \in Z\}$ kümesinin $(a, b) * (c, d) = (a + c, (-1)^c b + d)$ şeklinde tanımlanan * işleme göre bir grup olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm:

i) Kapalılık: Her $g_1, g_2 \in G$ için $g_1 * g_2 \in G$ olup olmadığını araştıralım.

$g_1 \in G$ olduğundan $g_1 = (a_1, b_1)$ olacak şekilde $a_1, b_1 \in Z$ vardır. Benzer şekilde $g_2 = (a_2, b_2)$ olacak şekilde $a_2, b_2 \in Z$ vardır.

$g_1 * g_2 = (a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, (-1)^{a_2} b_1 + b_2)$ olur. $a_1 + a_2$ ve $(-1)^{a_2} b_1 + b_2 \in Z$ olduğundan $g_1 * g_2 \in G$ sağlanır.

ii) Birleşme: Her $g_1, g_2, g_3 \in G$ için $g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3$ olduğu kolayca görülebilir.

iii) Birim eleman: Her $g \in G$ için $g * e = e * g = g$ olacak şekilde $e \in G$ bulalım.

$g \in G$ olduğu için $g = (a, b)$ olacak şekilde $a, b \in Z$ vardır. $e = (e_1, e_2)$ olmak üzere $g * e = (a, b) * (e_1, e_2) = (a + e_1\,, (-1)^{e_1} b + e_2) = (a, b)$ denklemi çözülürse $e = (e_1, e_2) = (0, 0)$ bulunur.

iv) Ters Eleman: Her $g \in G$ için $g * x = x * g = e$ olacak şekilde $g^{-1} = x \in G$ bulalım.

$a, b, x_1, x_2 \in Z$ olmak üzere $g = (a, b)$ ve $x = (x_1, x_2)$ alalım.
$g * x = (a, b) * (x_1, x_2) = (x_1, x_2) * (a, b) = (0, 0)$ olmalıdır.
$(a, b) * (x_1, x_2) = (a + x_1, (-1)^{x_1} b + x_2) = (0, 0)$ denklemi çözülürse $x_1 = -a$ ve $x_2 = -(-1)^{-a} b$ bulunur.
Dolayısıyla a tek tam sayı ise $g^{-1} = x = (x_1, x_2) = (-a, b)$
a çift tam sayı ise $g^{-1} = x = (x_1, x_2) = (-a, -b)$ bulunur.

14) X boş olmayan bir küme $P(X)$, X in tüm alt kümelerinin ailesi (kuvvet kümesi) olmak üzere aşağıda verilen ikili işlemlere göre $P(X)$ in bir grup olup olmadığını belirleyiniz. $A, B \in P(X)$ olsun.

(a) $A * B = A \cup B$

(b) $A \circ B = A \cap B$

(c) $A \Delta B = (A * B) - (A \circ B)$

Çözüm:

(a) Ters eleman özelliği sağlanmaz.

(b) Ters eleman özelliği sağlanmaz.

(c) $P(X)$ kuvvet kümesi simetrik fark işlemiyle birlikte bir değişmeli grup oluşturur.

i) Kapalılık: $A, B \in P(X)$ alalım. O halde $A, B \subseteq X$ olur. Bu durumda $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) \subseteq X$ olduğundan $A\Delta B \in P(X)$ olur.

ii)Birleşme: Her $A, B, C \in P(X)$ için $A\Delta(B\Delta C) = \big(A - (B \cup C)\big) \cup (A \cap B \cap C) \cup \big(B - (C \cup A)\big) \cup \big(C - (B \cup A)\big) = (A\Delta B)\Delta C$ olur.

iii)Birim Eleman: $\emptyset \in P(X)$ elemanı birim elemandır, gerçekten her $A \in P(X)$ için $A\Delta\emptyset = (A \cup \emptyset) - (A \cap \emptyset) = A$ olur.

(iv) Ters Eleman: Her $A \in P(X)$ için $A\Delta A = (A \cup A) - (A \cap A) = \emptyset$ olduğundan $A^{-1} = A$ olur.

15) $(G,*)$ bir grup ve $a, b \in G$ olsun. $a * b = b * a^{-1}$ ve $b * a = a * b^{-1}$ ise $a^4 = b^4 = e$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$a * b = b * a^{-1}$ ......(1)

$b * a = a * b^{-1}$.......(2) olsun.

$$a * b = b * a^{-1} \Rightarrow (a * b) * a = b$$
$$\Rightarrow a * (b * a) = b.$$

Buradan (2) yardımıyla $a * (a * b^{-1}) = b$ elde edilir.

$a * (a * b^{-1}) = b \Rightarrow a * a = b * b \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow a^4 = b^4$.

Şimdi $a^4 = e$ olduğunu gösterelim.

(1) ve (2) den

$(a * b) * (b * a) = b * a^{-1} * a * b^{-1} = e$ olur. Öte yandan

$(a * b) * (b * a) = a * b^2 * a = a * a^2 * a = a^4$ elde edilir. Buradan $a^4 = e$ dir.

16) G bir grup olmak üzere $\forall\, a \in G$ için $a^2 = e$ ise, G grubunun değişmeli olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her $g_1, g_2 \in G$ için $g_1\, g_2 = g_2 g_1$ olduğunu göstermeliyiz.

G bir grup olduğundan $g_1\, g_2 \in G$ olur. O halde $(g_1\, g_2)^2 = e$ dir. Yani $(g_1\, g_2)(g_1\, g_2) = e$ elde edilir.

$$(g_1\, g_2)(g_1\, g_2) = e \Rightarrow {g_1}^2\, g_2 g_1\, g_2 = g_1$$
$$\Rightarrow e\, g_2 g_1\, g_2 = g_1$$
$$\Rightarrow g_2 g_1\, {g_2}^2 = g_1 g_2$$
$$\Rightarrow g_2 g_1\, e = g_1 g_2$$

17) Bir G grubunda $(ab)^2 = a^2b^2$ ise $ab = ba$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$(ab)^2 = abab = a^2b^2$ denklemi soldan a nın sağdan da b nin tersi ile çarpıldığında $ab = ba$ elde edilir.

18) $(G,*)$ bir grup ve $a, b \in G$ olsun. $(a * b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$ olması için gerek ve yeter koşul $a * b = b * a$ olmasıdır, gösteriniz.

Çözüm:

$(\Rightarrow)$: $a, b \in G$ için $(a * b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$ olsun. $((a * b)^{-1})^{-1} = (a^{-1} * b^{-1})^{-1}$ her $g \in G$ için $(g^{-1})^{-1} = g$ olduğundan $a * b = (b^{-1})^{-1} * (a^{-1})^{-1}$ buradan da $a * b = b * a$ olur. $(\Leftarrow)$: $a, b \in G$ için $a * b = b * a$ olsun. $(a * b)^{-1} = (b * a)^{-1} \Rightarrow (a * b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$ sağlanır.

19) Eleman sayısı çift olan bir grupta, tersi kendisine eşit olan birimden farklı bir eleman var olduğunu ispatlayınız.

Çözüm:

Bir G grubunda çift sayıda eleman olsun. Birim elemanın tersi kendisidir. Birimden farklı bir elemanında da tersi kendisidir. Aksi halde birim dışındaki elemanları tersleri ile ikişerli gruplandırdığımızda G nin eleman sayısı tek olur.

20) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ olmak üzere $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +)$ ve $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}) - \{0\}, .)$ nin değişmeli grup olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +)$ nın grup olduğunu gösterelim:

i) $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ olmak üzere $(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ olduğundan kapalıdır.

ii) $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2}, e + f\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ olmak üzere $[(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2})] + (e + f\sqrt{2}) = [(a + c) + (b + d)\sqrt{2}] + (e + f\sqrt{2}) = ((a + c) + e) + ((b + d) + f)\sqrt{2} = (a + (c + e)) + (b + (d + f))\sqrt{2} = (a + b\sqrt{2}) + [(c + e) + (d + f)\sqrt{2})] = (a + b\sqrt{2}) + [(c + d\sqrt{2}) + (e + f\sqrt{2})]$ olduğundan birleşme özelliği vardır.

iii) Her $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ için $(a + b\sqrt{2}) + (x + y\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$ ve $(x + y\sqrt{2}) + (a + b\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$ olacak şekilde $x + y\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ var mı? $(a + b\sqrt{2}) + (x + y\sqrt{2}) = (a + x) + (b + y)\sqrt{2}$=$(a + b\sqrt{2})$ dir. Buradan $a + x = a$ ve $b + y = b$ denklemlerinden $x = 0$ ve $y = 0$ elde edilir. Benzer şekilde $(x + y\sqrt{2}) + (a + b\sqrt{2}) = (x + a) + (y + b)\sqrt{2} = a + b\sqrt{2}$ denkleminden $x = 0$ ve $y = 0$ elde edilir. Birim elemanı 0 dır.

iv) Her $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ tersi var mı? $(a + b\sqrt{2}) + (x + y\sqrt{2}) = 0$ dan $(a + x) + (b + y)\sqrt{2} = 0$ elde edilir. Buradan $a + x = 0$ ve $b + y = 0$ denklemlerinden $x = -a$ ve $y = -b$ elde edilir. $(x + y\sqrt{2}) + (a + b\sqrt{2}) = 0$ dan da $x = -a$ ve $y = -b$ elde edilir. Yani $a + b\sqrt{2}$ tersi$-a - b\sqrt{2}$ dir.

$(\mathbb{Q}(\sqrt{2}) - \{0\}, \ .)$ nın grup olduğunu gösterelim:

i) $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ olmak üzere $(a + b\sqrt{2}).(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ olduğundan kapalıdır.

ii) $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2}, e + f\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ olmak üzere $[(a + b\sqrt{2}).(c + d\sqrt{2})].(e + f\sqrt{2}) = (a + b\sqrt{2}).[(c + d\sqrt{2}).(e + f\sqrt{2})]$ olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}[(a + b\sqrt{2}).(c + d\sqrt{2})].(e + f\sqrt{2}) &= [(ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}].(e + f\sqrt{2}) \\ &= [(ac + 2bd)e + 2(ad + bc)f] + [(ac + 2bd)f + (ad + bc)e]\sqrt{2} \\ &= (ace + 2bde + 2adf + 2bcf) + (acf + 2bdf + ade + bce)\sqrt{2}\end{aligned}$$

$(a + b\sqrt{2}).[(c + d\sqrt{2}).(e + f\sqrt{2})] = (a + b\sqrt{2}).[(ce + 2df) + (cf + de)\sqrt{2}] = (a(ce + 2df) + 2b(cf + de)) + (a(cf + de) + b(ce + 2df))\sqrt{2} = (ace + 2adf + 2bcf + 2bde) + (acf + ade + bce + 2bdf)\sqrt{2}$ olduğundan birleşme özelliği vardır.

iii) Her $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ için $(a + b\sqrt{2}).(x + y\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$ ve $(x + y\sqrt{2}).(a + b\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$ olacak şekilde $x + y\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ var mı? $(a + b\sqrt{2}).(x + y\sqrt{2}) = (ax + 2by) + (ay + bx)\sqrt{2} = a + b\sqrt{2}$ dir. Buradan, $ax + 2by = a$ ve $ay + bx = b$ denklemlerinden $x = 1$ ve $y = 0$ elde edilir. Benzer şekilde $(x + y\sqrt{2}).(a + b\sqrt{2}) = (xa + 2yb) + (xb + yb)\sqrt{2} = a + b\sqrt{2}$ den $x = 1$ ve $y = 0$ elde edilir. Yani, birim elemanı 1 dir.

iv) Her $a+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ tersi var mı? $(a+b\sqrt{2}).(x+y\sqrt{2})=1$ den $(ax+2by)+(ay+bx)\sqrt{2}=1$ elde edilir. Buradan, $ax+2by=1$ ve $ay+bx=0$ denklemlerinden $x=\frac{a}{a^2-b^2}$ ve $y=-\frac{b}{a^2-b^2}$ elde edilir. $(x+y\sqrt{2}).(a+b\sqrt{2})=1$ den de $x=\frac{a}{a^2-2b^2}$ ve $y=-\frac{b}{a^2-2b^2}$ elde edilir.

21) $(G,*)$ bir grup ve $a,b\in G$ olsun. Şu halde, $a*x=b$ ve $y*a=b$ denklemlerinin G içinde bir tek çözümü olduğunu ispatlayınız.
Çözüm: $a,b\in G$ için $a*x=b$ ve $y*a=b$ olsun. $a*x=b$ denklemi soldan a nın tersi ile $y*a=b$ denklemi sağdan a nın tersi ile işleme sokulduğunda $x=a^{-1}*b$ ve $y=b*a^{-1}$ elde edilir. $a*x=b$ denkleminin x ve x' gibi iki çözümü olsun. $a*x=b$ ve $a*x'=b$ denklemlerinden $a*x=\ a*x'$ elde edilir. Kısaltma özelliğinden $x=\ x'$ elde edilir. $y*a=b$ denkleminin de benzer şekilde bir tek çözümü olduğu gösterilir.

22) $n\geq 1$ olmak üzere $\left\{\cos\frac{k.360}{n}+i\sin\frac{k.360}{n} : k=0,1,2,\dots,n-1\right\}$ (x^n-1 in kompleks kökleri) kümesinin çarpım altında bir grup olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $e^{\frac{k360}{n}i}=\cos\frac{k.360}{n}+i\sin\frac{k.360}{n}$ olduğundan kümeyi şöyle yazabiliriz:

$$G=\left\{e^{\frac{k360}{n}i} : k=0,1,2,\dots,n-1\right\}$$

i) $e^{\frac{k_1360}{n}i},e^{\frac{k_2360}{n}i}\in G$ olmak üzere $e^{\frac{k_1360}{n}i}.e^{\frac{k_2360}{n}i}=e^{\frac{(k_1+k_2)60}{n}i}=e^{\frac{k360}{n}i}\in G$ dir. ($k_1+k_2\equiv k(n),0\leq k\leq n-1.$)

ii) $e^{\frac{k_1360}{n}i},e^{\frac{k_2360}{n}i},e^{\frac{k_3360}{n}i}\in G$ olmak üzere

$$(e^{\frac{k_1360}{n}i}.e^{\frac{k_2360}{n}i}).e^{\frac{k_3360}{n}i}=e^{\frac{(k_1+k_2)360}{n}i}.e^{\frac{k_3360}{n}i}=e^{\frac{((k_1+k_2)+k_3)360}{n}i}=e^{\frac{(k_1+(k_2+k_3))360}{n}i}$$
$$=e^{\frac{k_1360}{n}i}.e^{\frac{(k_2+k_3)360}{n}i}=e^{\frac{k_1360}{n}i}.(e^{\frac{k_2360}{n}i}.e^{\frac{k_3360}{n}i})$$

iii) Her $e^{\frac{k360}{n}i}\in G$ için $e^{\frac{k360}{n}i}.e^{\frac{t360}{n}i}=e^{\frac{k360}{n}i}$ ve $e^{\frac{t360}{n}i}.e^{\frac{k360}{n}i}=e^{\frac{k360}{n}i}$ olacak şekilde $e^{\frac{t360}{n}i}\in G$ var mı?
$t=0$ için $e^{\frac{k360}{n}i}.e^{0i}=e^{\frac{k360}{n}i}.1=e^{\frac{k360}{n}i}$ ve $e^{0i}.e^{\frac{k360}{n}i}=1.e^{\frac{k360}{n}i}=e^{\frac{k360}{n}i}$ dir. Buradan birim eleman 1 dir.

iv) Her $e^{\frac{k360}{n}i}\in G$ nin tersi var mı? $e^{\frac{k360}{n}i}.e^{\frac{t360}{n}i}=1$ ve $e^{\frac{t360}{n}i}.e^{\frac{k360}{n}i}=1$ den $e^{\frac{(k+t)360}{n}i}=1$ elde edilir. Bu ise $k+t=0$ veya $k+t=n$ olduğu durumda sağlanır. $k+t=0$ olması $t=-k$ olduğunda sağlanır. Bu $0\leq t\leq n-1$ olması ile çelişir. O halde $k+t=n$ dir, yani

$t = n - k$ dır. Yani $e^{\frac{k360}{n}i}$ nin tersi $e^{\frac{(n-k)360}{n}i}$ dır. $(G,.)$ bir gruptur.

23) $(\mathbb{Z}_{\mathbf{1000}}, +)$ 1000 elemanlı toplamsal bir gruptur. Ayrıca $(\mathbb{Z}_{100} \times \mathbb{Z}_{10}, +)$ da 1000 elemanlı toplamsal bir gruptur. Böyle bir çok grup örneği verilebilir.

24) Aşağıdaki ifadeler doğru/ yanlış mıdır? Doğru ise ispatlayınız, yanlış ise nedenini bir örnekle açıklayınız.

i) Bir grupta birden fazla birim eleman bulunabilir.

ii) G sonlu bir grup, $a \in G$ olsun. $a^n = e$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

iii) $(G,*)$ grup ise $a * x * b = c$ denklemi G de tek türlü çözüme sahiptir.

iv) $(G,*)$ bir grup ve $a, b, c \in G$ olsun. $a * b * c = e$ ise $b * c * a = e$ dir.

v) $(G,*)$ bir grup ve $a, b \in G$ olsun. $(a * b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$ dir.

vi) G grubu iki elemanlı ise Abel grubudur.

vii) $(G,*)$ bir grup ve $a, b \in G$ olsun. $(a * b)^2 = a^2 * b^2$ dir.

viii) Bir grupta her lineer denklemin çözümü vardır.

Çözüm:

i) (Yanlış) $(G,*)$ grubunun e ve e' gibi iki tane birim elemanı olsaydı e birim olduğundan $e * e' = e' * e = e'$ ve e' birim olduğundan $e' * e = e * e' = e$ bulunur. Yani, $e = e'$ dür.

ii) (Doğru) $a \in G$ olsun. G kapalı olduğundan $a^2 = aa \in G, a^3 = a^2a \in G, \dots, a^m \in G, \dots$ G sonlu bir grup olduğundan a nın bütün kuvvetleri farklı olamaz. Yani, $a^n = e$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

i) (Doğru) $a * x * b = c$ denklemi soldan a nın sağdan b nin tersi ile çarpılırsa $x = a^{-1}cb^{-1}$ elde edilir. Bu denklemin x ve x' gibi iki çözümü olsaydı,

kısaltma özelliği kullanılarak $x = x'$ bulunurdu.

ii) (Doğru) $a, b, c \in G$ için $a * b * c = e$ olsun. Eşitliği soldan a^{-1} ile çarparsak $b * c = a^{-1} * e = a^{-1}$ elde edilir ve böylece $b * c * a = a^{-1} * a = e$ bulunur.

i) (Yanlış) $Q = < i, j, k | i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 >$ quaternion grubunu düşünelim: $(ij)^{-1} = k^{-1} = -k$ fakat $i^{-1}j^{-1} = (-i)(-j) = ij = k$ dir.

ii) (Doğru) $G = \{e, a\}$ olmak üzere $(G,*)$ bir grup olsun. G nin işlem tablosu, grup aksiyomları gereğince şöyle olmak zorundadır:

$*$	e	a
e	e	a
a	a	e

Yukarıdaki tablodan grubun Abel (değişmeli) olduğu anlaşılır.

iii) (Yanlış) $Q =< i, j, k | i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 >$ quaternion grubunu düşünelim: $(ij)^2 = k^2 = -1$ fakat $i^2 j^2 = (-1)(-1) = 1$ dir.

iv) (Doğru) G bir grup olsun. Bir grupta bir bilinmeyenli lineer denklem x bilinmeyen ve $a, b \in G$ olmak üzere $a * x = b$ biçimindedir. Eşitliği soldan a^{-1} ile çarparsak $x = a^{-1} * b$ bulunur.