

## 1. GRUPLAR

### Sorular ve Çözümleri

1)  $G$  bir grup olmak üzere aşağıdaki eşitlikleri gösteriniz.

- i)  $e \in G$  birim eleman olmak üzere  $e^{-1} = e$ .
- ii)  $a \in G$  olmak üzere  $(a^{-1})^{-1} = a$ .
- iii)  $\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in G$  için  $(a_1 a_2 \dots a_n)^{-1} = a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \dots a_1^{-1}$ .

### Çözüm.

- i)  $ee = e$  olduğundan  $e^{-1} = e$  olur.
- ii)  $a(a^{-1}) = (a^{-1})a = e$  olduğundan  $(a^{-1})^{-1} = a$  dır.
- iii)  $\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in G$  için  $(a_1 a_2 \dots a_n)(a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \dots a_1^{-1}) = a_1 a_2 \dots (a_n a_n^{-1}) a_{n-1}^{-1} \dots a_1^{-1} = e$  ve  $(a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \dots a_1^{-1})(a_1 a_2 \dots a_n) = a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \dots (a_1^{-1} a_1) a_2 \dots a_n = e$  olduğundan  $(a_1 a_2 \dots a_n)^{-1} = a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \dots a_1^{-1}$  eşitliği gösterilmiş olur.

2) Aşağıdaki kümelerin verilen işlem altında bir grup olup olmadığını belirleyiniz.

- i)  $Z$  tamsayılar kümesi ve  $G = \{2n: n \in Z\}$  olmak üzere  $(G, +)$ ,
- ii)  $\mathbb{R}$  reel sayılar kümesi ve  $a.b = a + b + 1$  olmak üzere  $(\mathbb{R}, .)$ ,
- iii)  $\mathbb{R}^+$  pozitif reel sayılar kümesi  $a * b = \sqrt{ab}$  olmak üzere  $(\mathbb{R}^+, *)$ .

### Çözüm.

i) Gruptur.

- i) Her  $2n, 2m \in G$  için  $2n + 2m = 2(n + m) \in G$  (kapalılık)
- ii) Her  $2n, 2m, 2k \in G$  için  $(2n + 2m) + 2k = 2((n + m) + k) = 2(n + (m + k)) = 2n + (2m + 2k)$  (birleşme)
- iii) Her  $2n \in G$  için  $2n + 0 = 0 + 2n = 2n$  olduğundan  $0 = 2.0 \in G$  birim elemandır.
- iv) Her  $2n \in G$  için  $2n + (-2n) = (-2n) + 2n = 0$  olduğundan  $(2n)^{-1} = (-2n) = 2(-n) \in G$  ters eleman olarak bulunur. Şu halde  $(G, +)$  bir gruptur.

ii) Gruptur.

- i) Her  $a, b \in \mathbb{R}$  için  $a.b = a + b + 1 \in \mathbb{R}$  (kapalılık)
- ii) Her  $a, b, c \in \mathbb{R}$  için  $(a.b).c = (a + b + 1) + c + 1 = a + b + c + 2 = a + (b + c + 1) + 1 = a.(b.c)$  (birleşme)
- iii) Her  $a \in \mathbb{R}$  için  $a.e = a + e + 1 = a$  ve  $e.a = e + a + 1 = a$  olacak şekilde  $e = -1 \in \mathbb{R}$  birim elemandır.

iv) Her  $a \in \mathbb{R}$  için  $a \cdot x = a + x + 1 = e = -1$  ve  $x \cdot a = x + a + 1 = e = -1$  olacak şekilde  $a^{-1} = x = -a - 2 \in \mathbb{R}$  ters elemandır. Buradan  $(\mathbb{R}, \cdot)$  nin bir grup olduğu görülür.

iii) Değildir.

$\mathbb{R}^+$  pozitif reel sayılar kümesinde  $a * b = \sqrt{ab}$  olmak üzere  $(\mathbb{R}^+, *)$  bir grup oluşturmaz. Bunu ispatlamak için grup aksiyomlarından en az birinin sağlanmadığını bir örnekle göstermek yeterlidir. Örneğin  $a = 2, b = 3, c = 5$  için  $2 * (3 * 5) = \sqrt{2} \sqrt{15}$  iken  $(2 * 3) * 5 = \sqrt{5} \sqrt{6}$  olduğundan  $2 * (3 * 5) \neq (2 * 3) * 5$  birleşme özelliği sağlanmaz.

3)  $\mathbb{R}$  reel sayılar olmak üzere  $\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$  olmak üzere

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

işlemi altında  $(\mathbb{R}^n, +)$  nin bir grup olduğunu gösteriniz.

**Çözüm.**

i)  $\forall (a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$  için

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \in \mathbb{R}^n \text{ (kapalılık)}$$

ii)  $\forall (a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n), (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$  için

$$\begin{aligned} [(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)] + (c_1, c_2, \dots, c_n) &= ((a_1 + b_1) + c_1, \dots, (a_n + b_n) + c_n) \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_n) + [(b_1, b_2, \dots, b_n) + (c_1, c_2, \dots, c_n)] \text{ (birleşme)} \end{aligned}$$

iii)  $\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  için

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (0, \dots, 0) = (0, \dots, 0) + (a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

gerçeklendiğinden  $(0, \dots, 0)$  birim elemandır.

iv)  $\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  için

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (-a_1, \dots, -a_n) = (-a_1, \dots, -a_n) + (a_1, a_2, \dots, a_n) = (0, \dots, 0)$$

sağlandığından  $(a_1, a_2, \dots, a_n)^{-1} = (-a_1, \dots, -a_n)$  dir. (ters eleman)

Dolayısıyla  $(\mathbb{R}^n, +)$  nin bir grup olduğu gösterilmiş olur.

4)  $S = \mathbb{R} - \{-1\}$  ve  $a * b = a + b + ab$  olmak üzere  $(S, *)$  nin bir grup olup olmadığını inceleyiniz.

**Çözüm.**

i) Her  $a, b \in \mathbb{R}$  için  $a * b = a + b + ab \in \mathbb{R}$  sağlanır.  $a \neq -1$  ve  $b \neq -1$  iken  $a * b = -1$  olsa  $a * b = a + b + ab = -1$  den  $(a + 1)(b + 1) = 0$  olup, buradan  $a = -1$

veya  $b = -1$  çelişkesine varılır. O halde  $a * b \in \mathbb{R} - \{-1\} = S$  olup kapalılık koşulu sağlanır.

- ii)** Her  $a, b, c \in S$  için  $(a * b) * c = (a + b + ab) + c + (a + b + ab)c = a + b + ab + c + ac + bc + abc$  ve  $a * (b * c) = a + (b + c + bc) + a(b + c + bc) = a + b + c + bc + ab + ac + abc$  olduğundan birleşme özelliği sağlanmış olur.
- iii)** Her  $a \in S$  için  $a * e = a + e + ae = a$  ve  $e * a = e + a + ea = a$  ise  $e(1 + a) = 0$  olup,  $a \neq -1$  kabulü gereğince  $e = 0 \in S$  birim eleman olarak elde edilir.
- iv)** Her  $a \in S$  için  $a * t = a + t + at = e = 0$  ve  $t * a = t + a + ta = e = 0$  olacak şekilde  $t(a + 1) = -a$  olup  $a^{-1} = t = \frac{-a}{(a+1)} \in S$  ters elemandır ( $t \neq -1$  olduğu açıktır).

Böylece  $(S, *)$  nin bir grup olduğu görülür.

**5)**  $G = \{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0 \text{ veya } b \neq 0\}$  kümesi kompleks sayılardaki çarpma işlemine göre bir gruptur. Gösteriniz.

**Çözüm.**

- i)**  $\forall a + b\sqrt{-5}, c + d\sqrt{-5} \in G$  için  $(a + b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5}) = (ac - 5bd) + (ad + bc)\sqrt{-5} \in G$
- ii)**  $G \subset \mathbb{C} - \{0\}$  ve  $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$  grubu birleşme özelliğine sahip olduğundan  $G$  de aynı işleme göre birleşme özelliğine sahiptir.
- iii)**  $\forall a + b\sqrt{-5} \in G$  için  $(a + b\sqrt{-5})(1 + 0\sqrt{-5}) = (1 + 0\sqrt{-5})(a + b\sqrt{-5}) = (a + b\sqrt{-5})$  olduğundan  $(1 + 0\sqrt{-5}) \in G$  birim elemandır.
- iv)**  $(a + b\sqrt{-5})(t + s\sqrt{-5}) = (1 + 0\sqrt{-5})$  ve  $(t + s\sqrt{-5})(a + b\sqrt{-5}) = (1 + 0\sqrt{-5})$  ise  $(a + b\sqrt{-5})^{-1} = (t + s\sqrt{-5}) = \frac{1}{a + b\sqrt{-5}} = \frac{a}{a^2 + 5b^2} + \left(\frac{-b}{a^2 + 5b^2}\right)\sqrt{-5} \in G$  ters eleman olarak elde edilir. Böylece  $G$  nin bir grup olduğu gösterilmiş olur.

**6)**  $\mathbb{R}$  reel sayılar olmak üzere  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  olsun.  $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$  ile  $T_{a,b}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dönüşümünü tanımlayalım.  $T(\mathbb{R}^2) = \{T_{a,b} : a, b \in \mathbb{R}\}$  kümesinin bileşke işlemi altında bir grup olduğunu gösteriniz.

**Çözüm.**

- i) Her  $T_{a,b}, T_{c,d} \in T(\mathbb{R}^2)$  için  $(T_{a,b} \circ T_{c,d})(x, y) = T_{a,b}(x + c, y + d) = ((x + c) + a, (y + d) + b) = (x + (c + a), y + (d + b)) = T_{a+c, b+d}(x, y)$  olacak şekilde  $T_{a+c, b+d} \in T(\mathbb{R}^2)$  dir. (kapalılık)
- ii) Her  $T_{a,b}, T_{c,d}, T_{e,f} \in T(\mathbb{R}^2)$  için,  $(T_{a,b} \circ T_{c,d}) \circ T_{e,f} = T_{(a+c)+e, (b+d)+f} = T_{a+(c+e), b+(d+f)} = T_{a,b} \circ (T_{c,d} \circ T_{e,f})$  (birleşme)
- iii) Her  $T_{a,b} \in T(\mathbb{R}^2)$  için  $(T_{a,b} \circ T_{0,0}) = (T_{0,0} \circ T_{a,b}) = T_{a,b}$  olduğundan  $T_{0,0} \in T(\mathbb{R}^2)$  birim elemandır.
- iv) Her  $T_{a,b} \in T(\mathbb{R}^2)$  için  $(T_{a,b} \circ T_{-a,-b}) = (T_{-a,-b} \circ T_{a,b}) = T_{0,0}$  olduğundan  $(T_{a,b})^{-1} = T_{-a,-b} \in T(\mathbb{R}^2)$  ters elemanı bulunur. O halde  $(T(\mathbb{R}^2), \circ)$  bir grup oluşturur.

7)  $\mathbb{Q}$  rasyonel sayılar kümesi  $a * b = \frac{ab}{2}$  olmak üzere  $(\mathbb{Q} - \{0\}, *)$  bir grup mudur ?

**Çözüm.**

- i) Her  $a, b \in \mathbb{Q} - \{0\}$  için  $a * b = \frac{ab}{2} \in \mathbb{Q} - \{0\}$  (kapalılık)
- ii) Her  $a, b, c \in \mathbb{Q} - \{0\}$  için  $a * (b * c) = \frac{abc}{4} = (a * b) * c$  (birleşme)
- iii) Her  $a \in \mathbb{Q} - \{0\}$  için  $a * 2 = 2 * a = a$  olduğundan  $2 \in \mathbb{Q} - \{0\}$  birim eleman,
- iv) Her  $a \in \mathbb{Q} - \{0\}$  için  $a * t = t * a = \frac{at}{2} = 2$  ise  $a^{-1} = t = \frac{4}{a} \in \mathbb{Q} - \{0\}$  ters elemandır.

Buradan  $(\mathbb{Q} - \{0\}, *)$  bir gruptur.

8) Aşağıdaki kümelerin verilen işlem altında bir grup olup olmadığını belirleyiniz.

- i) Matrislerde toplama işlemine göre  $n \times n$  lik reel matrislerin kümesi
- ii) Matrislerde çarpma işlemine göre  $n \times n$  lik reel matrislerin kümesi
- iii) Matrislerde çarpma işlemine göre  $n \times n$  lik reel değerli köşegen matrislerin kümesi

**Çözüm.**  $n \times n$  lik reel matrislerin kümesinin  $M$  ile gösterelim.

- i) Matrislerde toplama işlemine göre  $n \times n$  lik reel matrislerin kümesi :

- i) Her  $(a_{ij}), (b_{ij}) \in M$  için  $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \in M$  (kapalılık)
- ii) Her  $(a_{ij}), (b_{ij}), (c_{ij}) \in M$  için  $((a_{ij}) + (b_{ij})) + (c_{ij}) = ((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}) = (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})) = (a_{ij}) + ((b_{ij}) + (c_{ij}))$  (birleşme)

iii) Her  $(a_{ij}) \in M$  için  $(a_{ij}) + 0_{n \times n} = 0_{n \times n} + (a_{ij}) = (a_{ij})$  olduğundan  $0_{n \times n} \in M$  birim elemandır.

iv) Her  $(a_{ij}) \in M$  için  $(a_{ij}) + (-a_{ij}) = (-a_{ij}) + (a_{ij}) = 0_{n \times n}$  olduğundan  $(a_{ij})^{-1} = (-a_{ij})$  ters eleman olarak bulunur. Sonuç olarak  $(M, +)$  bir grup oluşturur.

ii)  $n \times n$  lik reel bir matrisin çarpma işlemine göre tersinin olması için gerek ve yeter koşul determinantının sıfırdan farklı olmasıdır. Dolayısıyla determinanı sıfır olan matrislerin tersleri yoktur. Buradan  $(M, \cdot)$  bir grup değildir. Örneğin  $n = 2$  için  $2 \times 2$  lik reel bir matris olan  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  matrisinin tersi mevcut değildir.

iii) Benzer şekilde determinanı sıfır olan  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  köşegen matrisinin tersi mevcut olmadığından  $n \times n$  lik reel değerli köşegen matrislerin kümesi bir grup oluşturmaz.

9)  $SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}$  kümesinin matris çarpımına göre bir grup oluşturduğunu gösteriniz.

**Çözüm:** Bu kümeyi  $SL(2, \mathbb{R}) = \{A_{2 \times 2} : |A| = 1\}$  şeklinde yeniden yazabiliriz.

i) **Kapalılık:**  $A, B \in SL(2, \mathbb{R})$  alalım. O halde  $|A| = |B| = 1$  olur. Determinantın özelliklerinden  $|AB| = |A| \cdot |B| = 1$  ve böylece  $AB \in SL(2, \mathbb{R})$  olur.

ii) **Birleşme:** Matrislerde çarpım birleşme özelliğine sahip olduğundan özel olarak her  $A, B, C \in SL(2, \mathbb{R})$  için  $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$  olur.

iii) **Birim Eleman:**  $|I_{2 \times 2}| = 1$  olduğundan birim matris  $SL(2, \mathbb{R})$  nin elemanı olur. Birim matrisin birim eleman olduğu açıktır  $(A \cdot I = I \cdot A = A)$ .

iv) **Ters Eleman:**  $A \in SL(2, \mathbb{R})$  alalım.  $|A| = 1 \neq 0$  olduğundan  $A$  nın matrislerde çarpma işlemine göre tersi vardır.  $A$  nın tersine  $A^{-1}$  diyelim. Determinant özelliklerinden  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = 1$  ve böylece  $A^{-1} \in SL(2, \mathbb{R})$  dir.

10)  $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}$  kümesinin matris çarpımına göre bir grup oluşturduğunu gösteriniz.

Ayrıca  $G$  deki birimden farklı her elemanın mertebesinin sonsuz olduğunu görünüz.

**Çözüm:**

i) **Kapalılık:** Her  $g_1, g_2 \in G$  için  $g_1 \cdot g_2 \in G$  olup olmadığını araştıralım.

$g_1, g_2 \in G$  olduğundan  $g_1 = \begin{pmatrix} 1 & n_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  olacak şekilde  $n_1 \in \mathbb{Z}$  vardır. Benzer şekilde

$g_2 = \begin{pmatrix} 1 & n_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  olacak şekilde  $n_2 \in Z$  vardır.

$g_1 \cdot g_2 = \begin{pmatrix} 1 & n_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & n_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n_1 + n_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ve  $n_1 + n_2 \in Z$  olduğundan  $g_1 \cdot g_2 \in G$  sağlanır.

**ii) Birleşme:** Her  $g_1, g_2, g_3 \in G$  için  $g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3$  olduğu kolayca görülebilir.

**iii) Birim eleman:** Her  $g = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$  için  $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  denklemini sağlayan eleman  $\begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$  dir.

**iv) Ters Eleman:** Her  $g = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$  için  $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  denklemini sağlayan eleman  $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  dir.

Şimdi birimden farklı her elemanın mertebesinin sonsuz olduğunu gösterelim:  $k \in N$  olmak üzere,

her  $g = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$  ( $n \neq 0$ ) için  $g^k = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & kn \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  olur. Dolayısıyla her  $k \in N$  için  $g^k \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  olacağından her elemanın mertebesinin sonsuzdur.

**11)**  $GL(2, \mathbb{R})$  grubunda  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  elemanının varsa tersini bulunuz.

**Çözüm:**

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$  olduğundan tersi vardır.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  elemanı  $GL(2, \mathbb{R})$  nin birim elemanı olduğundan  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  denklemini çözüldüğünde verilen elemanın tersi  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  olarak bulunur.

**12)**  $G = \{(a, b, 3) : a, b \in Z\}$  kümesinin  $(a, b, 3) * (c, d, 3) = (a + c, b + d, 3)$  ikili işlemi ile birlikte bir değişmeli grup olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**

Grup olduğu Çözüm 3 e benzer olarak kolayca yapılabilir. Değişmeli olduğunu gösterelim :

Her  $g_1, g_2 \in G$  için  $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$  olduğunu gösterelim.

$g_1 \in G$  olduğundan  $g_1 = (a_1, b_1, 3)$  olacak şekilde  $a_1, b_1 \in Z$  vardır. Benzer şekilde  $g_2 \in G$  olduğundan  $g_2 = (a_2, b_2, 3)$  olacak şekilde  $a_2, b_2 \in Z$  vardır.

$$g_1 * g_2 = (a_1, b_1, 3) * (a_2, b_2, 3) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, 3)$$

$= (a_2 + a_1, b_2 + b_1, 3) = (a_2, b_2, 3) * (a_1, b_1, 3) = g_2 * g_1$  olduğundan değişmelidir.

**13)**  $G = Z \times Z = \{(a, b) : a, b \in Z\}$  kümesinin  $(a, b) * (c, d) = (a + c, (-1)^c b + d)$  şeklinde tanımlanan  $*$  işleme göre bir grup olup olmadığını inceleyiniz.

**Çözüm:**

**i) Kapalılık:** Her  $g_1, g_2 \in G$  için  $g_1 * g_2 \in G$  olup olmadığını araştıralım.

$g_1 \in G$  olduğundan  $g_1 = (a_1, b_1)$  olacak şekilde  $a_1, b_1 \in Z$  vardır. Benzer şekilde  $g_2 = (a_2, b_2)$  olacak şekilde  $a_2, b_2 \in Z$  vardır.

$g_1 * g_2 = (a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, (-1)^{a_2} b_1 + b_2)$  olur.  $a_1 + a_2$  ve  $(-1)^{a_2} b_1 + b_2 \in Z$  olduğundan  $g_1 * g_2 \in G$  sağlanır.

**ii) Birleşme:** Her  $g_1, g_2, g_3 \in G$  için  $g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2)g_3$  olduğu kolayca görülebilir.

**iii) Birim eleman:** Her  $g \in G$  için  $g * e = e * g = g$  olacak şekilde  $e \in G$  bulalım.

$g \in G$  olduğu için  $g = (a, b)$  olacak şekilde  $a, b \in Z$  vardır.  $e = (e_1, e_2)$  olmak üzere  $g * e = (a, b) * (e_1, e_2) = (a + e_1, (-1)^{e_1} b + e_2) = (a, b)$  denklemi çözülürse  $e = (e_1, e_2) = (0, 0)$  bulunur.

**iv) Ters Eleman:** Her  $g \in G$  için  $g * x = x * g = e$  olacak şekilde  $g^{-1} = x \in G$  bulalım.

$a, b, x_1, x_2 \in Z$  olmak üzere  $g = (a, b)$  ve  $x = (x_1, x_2)$  alalım.

$g * x = (a, b) * (x_1, x_2) = (x_1, x_2) * (a, b) = (0, 0)$  olmalıdır.

$(a, b) * (x_1, x_2) = (a + x_1, (-1)^{x_1} b + x_2) = (0, 0)$  denklemi çözülürse  $x_1 = -a$  ve  $x_2 = -(-1)^{-a} b$  bulunur.

Dolayısıyla  $a$  tek tam sayı ise  $g^{-1} = x = (x_1, x_2) = (-a, b)$

$a$  çift tam sayı ise  $g^{-1} = x = (x_1, x_2) = (-a, -b)$  bulunur.

**14)**  $X$  boş olmayan bir küme  $P(X)$ ,  $X$  in tüm alt kümelerinin ailesi (kuvvet kümesi) olmak üzere aşağıda verilen ikili işlemlere göre  $P(X)$  in bir grup olup olmadığını belirleyiniz.  $A, B \in P(X)$  olsun.

**(a)**  $A * B = A \cup B$

**(b)**  $A \circ B = A \cap B$

**(c)**  $A \Delta B = (A * B) - (A \circ B)$

**Çözüm:**

**(a)** Ters eleman özelliği sağlanmaz.

**(b)** Ters eleman özelliği sağlanmaz.

(c)  $P(X)$  kuvvet kümesi simetrik fark işlemiyle birlikte bir değişmeli grup oluşturur.

i) **Kapalılık:**  $A, B \in P(X)$  alalım. O halde  $A, B \subseteq X$  olur. Bu durumda  $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) \subseteq X$  olduğundan  $A \Delta B \in P(X)$  olur.

ii) **Birleşme:** Her  $A, B, C \in P(X)$  için  $A \Delta (B \Delta C) = (A - (B \cup C)) \cup (A \cap B \cap C) \cup (B - (C \cup A)) \cup (C - (B \cup A)) = (A \Delta B) \Delta C$  olur.

iii) **Birim Eleman:**  $\emptyset \in P(X)$  elemanı birim elemandır, gerçekten her  $A \in P(X)$  için  $A \Delta \emptyset = (A \cup \emptyset) - (A \cap \emptyset) = A$  olur.

(iv) **Ters Eleman:** Her  $A \in P(X)$  için  $A \Delta A = (A \cup A) - (A \cap A) = \emptyset$  olduğundan  $A^{-1} = A$  olur.

15)  $(G, *)$  bir grup ve  $a, b \in G$  olsun.  $a * b = b * a^{-1}$  ve  $b * a = a * b^{-1}$  ise  $a^4 = b^4 = e$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**

$$a * b = b * a^{-1} \dots\dots(1)$$

$$b * a = a * b^{-1} \dots\dots(2) \text{ olsun.}$$

$$\begin{aligned} a * b = b * a^{-1} &\Rightarrow (a * b) * a = b \\ &\Rightarrow a * (b * a) = b. \end{aligned}$$

Buradan (2) yardımıyla  $a * (a * b^{-1}) = b$  elde edilir.

$$a * (a * b^{-1}) = b \Rightarrow a * a = b * b \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow a^4 = b^4.$$

Şimdi  $a^4 = e$  olduğunu gösterelim.

(1) ve (2) den

$$(a * b) * (b * a) = b * a^{-1} * a * b^{-1} = e \text{ olur. Öte yandan}$$

$$(a * b) * (b * a) = a * b^2 * a = a * a^2 * a = a^4 \text{ elde edilir. Buradan } a^4 = e \text{ dir.}$$

16)  $G$  bir grup olmak üzere  $\forall a \in G$  için  $a^2 = e$  ise,  $G$  grubunun değişmeli olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:** Her  $g_1, g_2 \in G$  için  $g_1 g_2 = g_2 g_1$  olduğunu göstermeliyiz.

$G$  bir grup olduğundan  $g_1 g_2 \in G$  olur. O halde  $(g_1 g_2)^2 = e$  dir. Yani  $(g_1 g_2)(g_1 g_2) = e$  elde edilir.

$$\begin{aligned} (g_1 g_2)(g_1 g_2) = e &\Rightarrow g_1^2 g_2 g_1 g_2 = g_1 \\ &\Rightarrow e g_2 g_1 g_2 = g_1 \\ &\Rightarrow g_2 g_1 g_2^2 = g_1 g_2 \\ &\Rightarrow g_2 g_1 e = g_1 g_2 \end{aligned}$$



17) Bir  $G$  grubunda  $(ab)^2 = a^2b^2$  ise  $ab = ba$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**

$(ab)^2 = abab = a^2b^2$  denklemi soldan  $a$  nın sağdan da  $b$  nin tersi ile çarpıldığında  $ab = ba$  elde edilir.

18)  $(G, *)$  bir grup ve  $a, b \in G$  olsun.  $(a * b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$  olması için gerek ve yeter koşul  $a * b = b * a$  olmasıdır, gösteriniz.

**Çözüm:**

( $\Rightarrow$ ):  $a, b \in G$  için  $(a * b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$  olsun.  $((a * b)^{-1})^{-1} = (a^{-1} * b^{-1})^{-1}$  her  $g \in G$  için  $(g^{-1})^{-1} = g$  olduğundan  $a * b = (b^{-1})^{-1} * (a^{-1})^{-1}$  buradan da  $a * b = b * a$  olur.

( $\Leftarrow$ ):  $a, b \in G$  için  $a * b = b * a$  olsun.  $(a * b)^{-1} = (b * a)^{-1} \Rightarrow (a * b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$  sağlanır.

19) Eleman sayısı çift olan bir grupta, tersi kendisine eşit olan birimden farklı bir eleman var olduğunu ispatlayınız.

**Çözüm:**

Bir  $G$  grubunda çift sayıda eleman olsun. Birim elemanın tersi kendisidir. Birimden farklı bir elemanında da tersi kendisidir. Aksi halde birim dışındaki elemanları tersleri ile ikişerli gruplandırdığımızda  $G$  nin eleman sayısı tek olur.

20)  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$  olmak üzere  $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +)$  ve  $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}) - \{0\}, \cdot)$  nin değişmeli grup olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**

$(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +)$  nin grup olduğunu gösterelim:

i)  $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  olmak üzere  $(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  olduğundan kapalıdır.

ii)  $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2}, e + f\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  olmak üzere  $[(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2})] + (e + f\sqrt{2}) = [(a + c) + (b + d)\sqrt{2}] + (e + f\sqrt{2}) = ((a + c) + e) + ((b + d) + f)\sqrt{2} = (a + (c + e)) + (b + (d + f))\sqrt{2} = (a + b\sqrt{2}) + [(c + e) + (d + f)\sqrt{2}] = (a + b\sqrt{2}) + [(c + d\sqrt{2}) + (e + f\sqrt{2})]$  olduğundan birleşme özelliği vardır.

iii) Her  $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  için  $(a + b\sqrt{2}) + (x + y\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$  ve  $(x + y\sqrt{2}) + (a + b\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$  olacak şekilde  $x + y\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  var mı?  $(a + b\sqrt{2}) + (x + y\sqrt{2}) = (a + x) + (b + y)\sqrt{2} = (a + b\sqrt{2})$  dir. Buradan  $a + x = a$  ve  $b + y = b$  denklemlerinden  $x = 0$  ve  $y = 0$  elde edilir. Benzer şekilde  $(x + y\sqrt{2}) + (a + b\sqrt{2}) = (x + a) + (y + b)\sqrt{2} = a + b\sqrt{2}$  denkleminde  $x = 0$  ve  $y = 0$  elde edilir. Birim elemanı 0 dır.

iv) Her  $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  tersi var mı?  $(a + b\sqrt{2}) + (x + y\sqrt{2}) = 0$  dan  $(a + x) + (b + y)\sqrt{2} = 0$  elde edilir. Buradan  $a + x = 0$  ve  $b + y = 0$  denklemlerinden  $x = -a$  ve  $y = -b$  elde edilir.  $(x + y\sqrt{2}) + (a + b\sqrt{2}) = 0$  dan da  $x = -a$  ve  $y = -b$  elde edilir. Yani  $a + b\sqrt{2}$  tersi  $-a - b\sqrt{2}$  dir.

$(\mathbb{Q}(\sqrt{2}) - \{0\}, \cdot)$  nin grup olduğunu gösterelim:

i)  $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  olmak üzere  $(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  olduğundan kapalıdır.

ii)  $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2}, e + f\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  olmak üzere  $[(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2})] \cdot (e + f\sqrt{2}) = (a + b\sqrt{2}) \cdot [(c + d\sqrt{2}) \cdot (e + f\sqrt{2})]$  olduğunu gösterelim:  

$$[(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2})] \cdot (e + f\sqrt{2}) = [(ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}] \cdot (e + f\sqrt{2})$$

$$= [(ac + 2bd)e + 2(ad + bc)f] + [(ac + 2bd)f + (ad + bc)e]\sqrt{2}$$

$$= (ace + 2bde + 2adf + 2bcf) + (acf + 2bdf + ade + bce)\sqrt{2}$$

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot [(c + d\sqrt{2}) \cdot (e + f\sqrt{2})] = (a + b\sqrt{2}) \cdot [(ce + 2df) + (cf + de)\sqrt{2}] =$$

$$(a(ce + 2df) + 2b(cf + de)) + (a(cf + de) + b(ce + 2df))\sqrt{2} = (ace +$$

$$2adf + 2bcf + 2bde) + (acf + ade + bce + 2bdf)\sqrt{2}$$
 olduğundan birleşme özelliği vardır.

iii) Her  $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  için  $(a + b\sqrt{2}) \cdot (x + y\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$  ve  $(x + y\sqrt{2}) \cdot (a + b\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$  olacak şekilde  $x + y\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  var mı?  $(a + b\sqrt{2}) \cdot (x + y\sqrt{2}) = (ax + 2by) + (ay + bx)\sqrt{2} = a + b\sqrt{2}$  dir. Buradan,  $ax + 2by = a$  ve  $ay + bx = b$  denklemlerinden  $x = 1$  ve  $y = 0$  elde edilir. Benzer şekilde  $(x + y\sqrt{2}) \cdot (a + b\sqrt{2}) = (xa + 2yb) + (xb + ya)\sqrt{2} = a + b\sqrt{2}$  den  $x = 1$  ve  $y = 0$  elde edilir. Yani, birim elemanı 1 dir.

iv) Her  $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  tersi var mı?

$(a + b\sqrt{2}).(x + y\sqrt{2}) = 1$  den  $(ax + 2by) + (ay + bx)\sqrt{2} = 1$  elde edilir. Buradan,

$ax + 2by = 1$  ve  $ay + bx = 0$  denklemlerinden  $x = \frac{a}{a^2 - b^2}$  ve  $y = -\frac{b}{a^2 - b^2}$  elde edilir.

$(x + y\sqrt{2}).(a + b\sqrt{2}) = 1$  den de  $x = \frac{a}{a^2 - 2b^2}$  ve  $y = -\frac{b}{a^2 - 2b^2}$  elde edilir.

21)  $(G, *)$  bir grup ve  $a, b \in G$  olsun. Şu halde,  $a * x = b$  ve  $y * a = b$  denklemlerinin  $G$  içinde bir tek çözümü olduğunu ispatlayınız.

**Çözüm:**  $a, b \in G$  için  $a * x = b$  ve  $y * a = b$  olsun.  $a * x = b$  denklemi soldan  $a$  nın tersi ile  $y * a = b$  denklemi sağdan  $a$  nın tersi ile işleme sokulduğunda  $x = a^{-1} * b$  ve  $y = b * a^{-1}$  elde edilir.  $a * x = b$  denkleminin  $x$  ve  $x'$  gibi iki çözümü olsun.  $a * x = b$  ve  $a * x' = b$  denklemlerinden  $a * x = a * x'$  elde edilir. Kısaltma özelliğinden  $x = x'$  elde edilir.  $y * a = b$  denkleminin de benzer şekilde bir tek çözümü olduğu gösterilir.

22)  $n \geq 1$  olmak üzere  $\left\{ \cos \frac{k.360}{n} + i \sin \frac{k.360}{n} : k = 0, 1, 2, \dots, n - 1 \right\}$

$(x^n - 1)$  in kompleks kökleri) kümesinin çarpım altında bir grup olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**  $e^{\frac{k360}{n}i} = \cos \frac{k.360}{n} + i \sin \frac{k.360}{n}$  olduğundan kümeyi şöyle yazabiliriz:

$$G = \left\{ e^{\frac{k360}{n}i} : k = 0, 1, 2, \dots, n - 1 \right\}$$

i)  $e^{\frac{k_1 360}{n}i}, e^{\frac{k_2 360}{n}i} \in G$  olmak üzere  $e^{\frac{k_1 360}{n}i} . e^{\frac{k_2 360}{n}i} = e^{\frac{(k_1+k_2)60}{n}i} = e^{\frac{k_3 360}{n}i} \in G$  dir. ( $k_1 + k_2 \equiv k(n), 0 \leq k \leq n - 1$ .)

ii)  $e^{\frac{k_1 360}{n}i}, e^{\frac{k_2 360}{n}i}, e^{\frac{k_3 360}{n}i} \in G$  olmak üzere

$$\begin{aligned} (e^{\frac{k_1 360}{n}i} . e^{\frac{k_2 360}{n}i}) . e^{\frac{k_3 360}{n}i} &= e^{\frac{(k_1+k_2)360}{n}i} . e^{\frac{k_3 360}{n}i} = e^{\frac{((k_1+k_2)+k_3)360}{n}i} = e^{\frac{(k_1+(k_2+k_3))360}{n}i} \\ &= e^{\frac{k_1 360}{n}i} . e^{\frac{(k_2+k_3)360}{n}i} = e^{\frac{k_1 360}{n}i} . (e^{\frac{k_2 360}{n}i} . e^{\frac{k_3 360}{n}i}) \end{aligned}$$

iii) Her  $e^{\frac{k360}{n}i} \in G$  için  $e^{\frac{k360}{n}i} . e^{\frac{t360}{n}i} = e^{\frac{k360}{n}i}$  ve  $e^{\frac{t360}{n}i} . e^{\frac{k360}{n}i} = e^{\frac{k360}{n}i}$  olacak şekilde  $e^{\frac{t360}{n}i} \in G$  var mı?

$t = 0$  için  $e^{\frac{k360}{n}i} . e^{0i} = e^{\frac{k360}{n}i} . 1 = e^{\frac{k360}{n}i}$  ve  $e^{0i} . e^{\frac{k360}{n}i} = 1 . e^{\frac{k360}{n}i} = e^{\frac{k360}{n}i}$  dir. Buradan birim eleman 1 dir.

iv) Her  $e^{\frac{k360}{n}i} \in G$  nin tersi var mı?  $e^{\frac{k360}{n}i} . e^{\frac{t360}{n}i} = 1$  ve  $e^{\frac{t360}{n}i} . e^{\frac{k360}{n}i} = 1$  den  $e^{\frac{(k+t)360}{n}i} = 1$  elde edilir. Bu ise  $k + t = 0$  veya  $k + t = n$  olduğu durumda sağlanır.  $k + t = 0$  olması  $t = -k$  olduğunda sağlanır. Bu  $0 \leq t \leq n - 1$  olması ile çelişir. O halde  $k + t = n$  dir, yani

$t = n - k$  dır. Yani  $e^{\frac{k360}{n}i}$  nin tersi  $e^{\frac{(n-k)360}{n}i}$  dır.  $(G, .)$  bir gruptur.

23) Aşağıdaki ifadeler doğru/ yanlış mıdır? Doğru ise ispatlayınız, yanlış ise nedenini bir örnekle açıklayınız.

- i) Bir grupta birden fazla birim eleman bulunabilir.
- ii)  $G$  sonlu bir grup,  $a \in G$  olsun.  $a^n = e$  olacak şekilde bir  $n \in \mathbb{N}$  vardır.
- iii)  $(G, *)$  grup ise  $a * x * b = c$  denklemi  $G$  de tek türlü çözüme sahiptir.
- iv)  $(G, *)$  bir grup ve  $a, b, c \in G$  olsun.  $a * b * c = e$  ise  $b * c * a = e$  dir.
- v)  $(G, *)$  bir grup ve  $a, b \in G$  olsun.  $(a * b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$  dir.
- vi)  $G$  grubu iki elemanlı ise Abel grubudur.
- vii)  $(G, *)$  bir grup ve  $a, b \in G$  olsun.  $(a * b)^2 = a^2 * b^2$  dir.
- viii) Bir grupta her lineer denklemin çözümü vardır.

**Çözüm:**

- i) **(Yanlış)**  $(G, *)$  grubunun  $e$  ve  $e'$  gibi iki tane birim elemanı olsaydı  $e$  birim olduğundan  $e * e' = e' * e = e' ve  $e'$  birim olduğundan  $e' * e = e * e' = e$  bulunur. Yani,  $e = e'$  dır.$
- ii) **(Doğru)**  $a \in G$  olsun.  $G$  kapalı olduğundan  $a^2 = aa \in G, a^3 = a^2a \in G, \dots, a^m \in G, \dots G$  sonlu bir grup olduğundan  $a$  nın bütün kuvvetleri farklı olamaz. Yani,  $a^n = e$  olacak şekilde bir  $n \in \mathbb{N}$  vardır.
- i) **(Doğru)**  $a * x * b = c$  denklemi soldan  $a$  nın sağdan  $b$  nin tersi ile çarpılırsa  $x = a^{-1}cb^{-1}$  elde edilir. Bu denklemin  $x$  ve  $x'$  gibi iki çözümü olsaydı,

kısaltma özelliği kullanılarak  $x = x'$  bulunurdu.

- ii) **(Doğru)**  $a, b, c \in G$  için  $a * b * c = e$  olsun. Eşitliği soldan  $a^{-1}$  ile çarparsak  $b * c = a^{-1} * e = a^{-1}$  elde edilir ve böylece  $b * c * a = a^{-1} * a = e$  bulunur.
- i) **(Yanlış)**  $Q = \langle i, j, k | i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \rangle$  quaternion grubunu düşünelim:  $(ij)^{-1} = k^{-1} = -k$  fakat  $i^{-1}j^{-1} = (-i)(-j) = ij = k$  dir.
- ii) **(Doğru)**  $G = \{e, a\}$  olmak üzere  $(G, *)$  bir grup olsun.  $G$  nin işlem tablosu, grup aksiyomları gereğince şöyle olmak zorundadır:

*	$e$	$a$
$e$	$e$	$a$
$a$	$a$	$e$

Yukarıdaki tablodan grubun Abel (değişmeli) olduğu anlaşılır.

**iii) (Yanlış)**  $Q = \langle i, j, k \mid i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \rangle$  quaternion grubunu düşünelim:

$(ij)^2 = k^2 = -1$  fakat  $i^2j^2 = (-1)(-1) = 1$  dir.

**iv) (Doğru)**  $G$  bir grup olsun. Bir grupta bir bilinmeyenli lineer denklem  $x$  bilinmeyen ve  $a, b \in G$  olmak üzere  $a * x = b$  biçimindedir. Eşitliği soldan  $a^{-1}$  ile çarparsak  $x = a^{-1} * b$  bulunur.