1. GRUPLAR

Tanım 1.1. G boş olmayan bir küme ve $*$, G de bir ikili işlem olsun. $(G,*)$ cebirsel yapısına aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bir **grup** denir.

1) $\forall\ a,b,c \in G$ için $a*(b*c)=(a*b)*c$ (Birleşme özelliği) sağlanır.

2) $\forall a \in G$ için $a*e=e*a=a$ olacak şekilde $e \in G$ (e ye birim eleman denir) vardır.

3) $\forall a \in G$ için $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$ olacak şekilde $a^{-1} \in G$ (a^{-1} elemanına a nın tersi denir) vardır.

Not 1.2.

1) $(G,*)$ grubunun birim elemanı tektir. Gerçekten kabul edelim ki e ve e' iki birim eleman olsun. e birim eleman olduğundan $\forall a \in G$ için $a*e=e*a=a$ olur. Özel olarak $a=e'$ alınırsa $e'*e=e*e'=e'$ bulunur. Aynı şekilde e' bir birim eleman olduğundan $\forall a \in G$ için $a*e'=e'*a=a$ dır. Özel olarak $a=e$ alınırsa $e*e'=e'*e=e$ bulunur. Böylece $e'=e$ olur.

2) $(G,*)$ grubunun her $g \in G$ elemanının tersi tektir. Kabul edelim ki g nin tersi g_1 ve g_2 olsun. Bu halde $g*g_1=g_1*g=e$ ve $g*g_2=g_2*g=e$ eşitlikleri sağlanır. Böylece $g_1=g_1*(g*g_2)=(g_1*g)*g_2=e*g_2=g_2$ olur.

Tanım 1.3. $(G,*)$ bir grup ve $\forall a,b \in G$ için $a*b=b*a$ değişme özelliği sağlanıyorsa G grubuna **değişmeli grup** veya **Abel grubu** denir.

Tanım 1.4 $(G,*)$ grubu değişmeli değilse bu gruba **değişmeli olmayan grup** denir.

Tanım 1.5. G sonlu bir küme ise $(G,*)$ grubuna bir **sonlu grup**, aksi halde sonsuz grup denir. Ayrıca G nin eleman sayısına $(G,*)$ grubunun mertebesi denir ve $|G|$ ile gösterilir.

Örnekler 1.6.

İki elemanlı bir küme üzerinde bir grup yapısı kurmaya çalışalım.

1) $G = \{e, a\}$, $*$ işlemine göre bir grup ve e birim eleman ise G grubunun işlem tablosu aşağıdaki gibidir. Bir grup işlemi için bir çizelge verildiğinde, önce çizelgedeki birim elemanını listeyeceğiz.

$*$	e	a
e	e	a
a	a	e

Tablodan anlaşıldığı gibi bu grup değişmelidir.

Şimdi üç elemanlı bir küme üzerinde bir grup yapısı kurmaya çalışalım.

2) $G = \{e, a, b\}$, $*$ işlemine göre bir grup ve e birim eleman ise G grubunun işlem tablosu aşağıdaki gibidir.

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Tablodan anlaşıldığı gibi bu grup değişmelidir.

3) $G = \{e, a, b, c\}$, * işlemine göre bir grup ve e birim eleman ise G grubunun işlem tablosu aşağıdaki gibi 4 farklı biçimde oluşabilir (İzomorfizma farkıyla dördüncü mertebeden sadece 2 tane grup olduğunu daha sonra göstereceğiz).

a)

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

b)

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

c)

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	c	e	b
b	b	e	c	a
c	c	b	a	e

d)

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

b) şıkkındaki grup **Kleinin 4-lü grubu** olarak adlandırılır. Bu grubun özelliği her elemanın karesi birim olan değişmeli bir grup olmasıdır.

4) Z tam sayılar kümesi, bilinen toplama işlemine göre bir toplamsal gruptur.

5) Rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, bilinen toplama işlemine göre bir toplamsal gruptur.

6) $\mathbb{Q}$ -$\{0\}$ ve $\mathbb{R}$ -$\{0\}$ kümeleri, bilinen çarpma işlemine göre bir değişmeli çarpımsal gruptur.

7) G ={ 1, -1 } kümesi, çarpma işlemine göre mertebesi 2 olan bir değişmeli gruptur.

8) G ={1, -1, $i, -i$ } kümesi, çarpma işlemine göre mertebesi 4 olan bir değişmeli gruptur.

9) n bir pozitif tamsayı ve $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olsun. Girdileri $\mathbb{R}$ içinde olan $n \times n$ lik matrisler kümesini $\mathbb{R}^{nxn}$ ile gösterelim. Bu halde her $n \geq 1$ için $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{nxn}: detA \neq 0\}$ kümesi, matrislerde çarpma işlemine göre bir gruptur. Matrislerde değişme özelliği olmadığından $GL(n, \mathbb{R})$ değişmeli olmayan bir gruptur. Bu gruba ***n*. dereceden Genel Lineer grup** denir.

10) $Z_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}\}$ $(n \geq 1)$ olmak üzere $\forall \bar{a}, \bar{b} \in Z_n$ için $\bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{\mathrm{a+b}}$ işlemi altında $(Z_n, \oplus)$ bir değişmeli gruptur. Bu grubun birimi $\overline{0}$ dır.

11) $\mathbb{R}$, reel sayılar kümesi olmak üzere $G = \{x \in \mathbb{R}: x^2 < 1\}$ olsun. $\forall x, y \in G$ için $x * y = (x+y)/(1+xy)$ ile bir $*$ işlemi tanımlansın. $(G, *)$ nın bir değişmeli grup olduğunu gösterelim.

a) $[(x+y)/(1+xy)]^2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2xy + y^2 < 1 + 2xy + x^2 y^2$

$\Leftrightarrow (1-x^2)(1-y^2) > 0$

Böylece $\forall x, y \in G$ için $x * y \in G$ dir.

b) $\forall x, y, z \in G$ için $x*(y*z) = (x+y+z+xyz)/(1+xy+xz+yz) = (x*y)*z$ olduğundan $\forall x, y, z \in G$ için $x*(y*z) = (x*y)*z$ dir.

c) $x * 0 = 0 * x = x$ olduğundan 0 birim elemandır.

d) $x * (-x) = (-x) * x = 0$ olduğundan x elemanının tersi $-x$ dir.

e) $\forall x, y \in G$ için $x * y = y * x$ olduğundan $(G, *)$ bir değişmeli gruptur.

12) Aşağıdaki kümelerin verilen $*$ işlemi altında bir grup oluşturmadığını gösterelim.

a) $a * b = \max\{a, b\}$ işlemi altında $(Z^+, *)$

b) $a * b = \min\{a, b\}$ ile $(Z, *)$

c) $a * b = a + b - ab$ ile $(\mathbb{R}, +)$

Çözüm.

a) Grup değildir. 1, birim eleman fakat $2 * a = 1$ olması $\max\{2, a\} = 1$ olmasını gerektirir. Yani 2 nin tersi yoktur.

b) Birim elemanı yoktur. e gibi birim elemanı olsaydı $\forall a \in Z$ için $a * e = \min\{a, e\} = a$ ve böylece $a \leq e$ olurdu. e, Z nin en büyük elemanı olurdu. Bu çelişki oluşturur.

c) 0 birim elemandır. $1 * b = 0$ olması $1 = 0$ olmasını gerektirdiğinden 1 in tersi yoktur.

13) $(G_1, *), (G_2, o)$ iki grup olsun. $\forall$ $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in G_1 \times G_2$ için

$$(a_1, b_1).(a_2, b_2) = (a_1 * a_2, b_1 o b_2)$$

ile tanımlanan " . " işlemine göre $G_1 \times G_2$ gruptur. Bu gruba G_1 ile G_2 nin **direkt çarpımı** denir. Şimdi grup aksiyomlarının sağlandığını gösterelim.

i) $\forall\,(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in G_1\times G_2$ için $(a_1,b_1).(a_2,b_2)=(a_1*a_2,b_1ob_2)\in G_1\times G_2$ olduğundan kapalılık özelliği sağlanır.

ii) $\forall\,(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3)\in G_1\times G_2$ için

$$[(a_1,b_1).(a_2,b_2)].(a_3,b_3)=(a_1*a_2,b_1ob_2).(a_3,b_3)$$
$$=\big((a_1*a_2)*a_3,(b_1ob_2)ob_3\big)$$

$$(a_1,b_1).[(a_2,b_2).(a_3,b_3)]=(a_1,b_1).(a_2*a_3,b_2ob_3)$$
$$=((a_1*(a_2*a_3),b_1o(b_2ob_3))$$
$$=((a_1*a_2)*a_3,(b_1ob_2)ob_3))$$

Dolayısıyla $[(a_1,b_1).(a_2,b_2)].(a_3,b_3)=(a_1,b_1).[(a_2,b_2).(a_3,b_3)]$ olur.

iii) $e_1\ ve\ e_2$ sırasıyla G_1 ve G_2 nin birim elemanı iseler $(e_1,e_2)\in G_1\times G_2$ de " . " işlemine göre birimdir. Gerçekten, $\forall\,(a,b)\in G_1\times G_2$ için

$$(a,b).(e_1,e_2)=(a*e_1,boe_2)=(a,b)$$
$$(e_1,e_2).(a,b)=(e_1*a,e_2ob)=(a,b)$$

olur.

iv) $G_1\times G_2$ deki herhangi bir (a,b) elemanının tersi, $a\in G_1$ nin "$*$" işlemine göre tersi a^{-1} ve $b\in G_2$ nin "o" işlemine göre tersi b^{-1} olmak üzere (a^{-1},b^{-1}) dir.

14) Herhangi bir $n\geq 2$ için Z_n nin n ile aralarında asal olan elemanlarının oluşturduğu kümeyi $Z_n{}^*$ ile gösterelim. Yani $Z_n{}^*=\{\bar{k}\in Z_n\colon (k,n)=1\}$ olsun. $Z_n{}^*$ kümesi için $\bar{x}\odot\bar{y}=\overline{xy}$ işlemi tanımlansın. $(Z_n{}^*,\odot)$ bir gruptur. Gerçekten,

i) $\forall\,\bar{x},\bar{y}\in Z_n{}^*$ için $(x,n)=(y,n)=1$ iken $(xy,n)=1$ elde edilir. O halde $\bar{x}\odot\bar{y}\in Z_n{}^*$ dir.

ii) $\odot$ işleminin $Z_n{}^*$ üzerinde birleşme özelliğine sahip olduğu açıktır.

iii) $\bar{1}\in Z_n{}^*$ ve her $\bar{k}\in Z_n{}^*$ için $\bar{1}\odot\bar{k}=\bar{k}\odot\bar{1}=\bar{k}$ olduğundan $\bar{1}$, $(Z_n{}^*,\odot)$ nın birim elemanıdır.

iv) $\bar{k}\in Z_n{}^*$ ise k ile n aralarında asal olduğundan $kx+ny=1$ olacak şekilde $x,y\in Z$ vardır. Buradan $\bar{n}\,\bar{y}=\bar{0}$ olduğundan $\bar{k}$ tersinirdir.

Ayrıca $\forall\,\bar{x},\bar{y}\in Z_n{}^*$ için $\bar{x}\odot\bar{y}=\overline{xy}=\overline{yx}=\bar{y}\odot\bar{x}$ olduğundan $(Z_n{}^*,\odot)$ değişmeli bir gruptur.

15) Q$_2$ = $\{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\}$ kümesi üzerinde çarpma işlemi; $i^2=j^2=k^2=-1, ij=k$ olarak tanımlansın. $(Q_2, .)$ Grubunun aşağıdaki işlem tablosundan 8 elemanlı değişmeli olmayan gru olduğu görülür. Bu gruba quaternion grubu denir:

$\cdot$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

16) Tüm reel kat sayılı polinomların kümesini $\mathbb{R}[x]$ ile gösterelim. Bu kümeden alınan iki polinomun toplamını $p(x) + q(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n$ ile tanımlayalım. Yukarıdaki toplama işlemiyle birlikte $\mathbb{R}[x]$ bir toplamsal gruptur: polinomlarda toplama işlemi birleşme özelliğine sahiptir. Ayrıca bu grubun birim elemanı sıfır polinomudur ve her $p(x)$ polinomunun tersi $-p(x)$ dir.

17) $H = \left\{\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$ kümesini göz önüne alalım. Matrislerde çarpma işleminin birleşme özelliği olduğunu biliyoruz. H kümesinden iki keyfi matris alalım: $A = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 1 & d & f \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ olmak üzere, $A.B = \begin{pmatrix} 1 & d+a & f+ae+c \\ 0 & 1 & e+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ olup H nin kapalılık özelliğine sahip olduğu görülür. Ayrıca $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ birim matris H nin elemanı olup çarpma işleminin birim elemanıdır. Son olarak H den alınan her A matrisi için $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ab-c \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ olup her elemanın tersi vardır. Böylece H matrislerde çarpma işlemiyle birlikte bir grup oluşturur ve bu gruba Heisenberg grubu denir.

Önerme 1.7. (Kısaltma Özelliği) $(G,*)$ bir grup ise $\forall a,b,c \in G$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i) $a*b=a*c \Rightarrow b=c$
ii) $a*c=b*c \Rightarrow a=b$

İspat:

i) $a*b=a*c \Rightarrow a^{-1}*(a*b)=a^{-1}*(a*c)$

$$\Rightarrow (a^{-1}*a)*b=(a^{-1}*a)*c$$
$$\Rightarrow b=c$$

ii) $a*c=b*c \Rightarrow (a*c)*c^{-1}=(b*c)*c^{-1}$

$$\Rightarrow a*(c*c^{-1})=b*(c*c^{-1})$$
$$\Rightarrow a*e=b*e$$
$$\Rightarrow a=b$$

Tanım 1.8. $n \geq 2$ olmak üzere bir pozitif tam sayı ve $(G,*)$ bir grup olsun. $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$ olmak üzere $a_1 * a_2 * \dots * a_n = (a_1 * a_2 * \dots * a_{n-1}) * a_n$ olarak tanımlanır.

Teorem 1.9.($\boldsymbol{Genel\ Birleşme\ Kuralı}$) Bir $(G,.)$ grubunda aşağıdaki gibi alınan herhangi bir n (≥ 3) li çarpımda aşağıdaki kural geçerlidir :

$$(\,*\,)\quad a_1 \dots a_k . a_{k+1} \dots a_n = (a_1 \dots a_k)(a_{k+1} \dots a_n) \quad (1 \leq k \leq n-1).$$

olur.

İspat. $n = k + l$ olsun. Şu halde $l \geq 1$ olup (*) eşitliğini

$$(\,**\,)\quad a_1 \dots a_k . a_{k+1} \dots a_{k+l} = (a_1 \dots a_k)(a_{k+1} \dots a_{k+l})$$

olarak ifade edebiliriz. Şimdi k yı sabit tutalım ve (**) eşitliğinin her $l \in \mathbb{N}$ için doğru olduğunu tümevarımla gösterelim.

$l = 1$ için Tanım 1.8 den

$$a_1 \dots a_k . a_{k+1} = (a_1 \dots a_k) . a_{k+1}$$

eşitliği vardır.

$l > 1$ ve iddia $l - 1$ için doğru olsun. Yani

$$(***)\qquad a_1 \dots a_k . a_{k+1} \dots a_{k+l-1} = (a_1 \dots a_k).(a_{k+1} \dots a_{k+l-1})$$

olsun. Tanım 1.8 den

$$a_1 \dots a_k . a_{k+1} \dots a_{k+l-1} . a_{k+l} = (a_1 \dots a_k . a_{k+1} \dots a_{k+l-1}) . a_{k+l}$$

elde edilir ve böylece $(***)$ den

$$a_1 \dots a_k . a_{k+1} \dots a_{k+l-1} . a_{k+l} = [(a_1 \dots a_k)(a_{k+1} \dots a_{k+l-1})] . a_{k+l}$$

eşitliği elde edilir. Birleşme özelliğinden

$$a_1 \dots a_k . a_{k+1} \dots a_{k+l-1} . a_{k+l} = (a_1 \dots a_k)[(a_{k+1} \dots a_{k+l-1}) a_{k+l}]$$

ve Tanım 1.8 den $(a_{k+1} \dots a_{k+l-1}) . a_{k+l} = a_{k+1} \dots a_{k+l-1} . a_{k+l}$ olduğundan

$$a_1 \dots a_k . a_{k+1} \dots a_{k+l-1} . a_{k+l} = (a_1 \dots a_k)(a_{k+1} \dots a_{k+l-1} . a_{k+l})$$

eşitliğini ederiz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 1.10. $G \neq \emptyset$ bir küme ve $*$, G de bir ikili işlem olsun. $*$ işlemi, kapalılık ve birleşme aksiyomları ile aşağıdaki aksiyomları sağlasın:

A) $\forall\, a \in G,\; e * a = a$ olmak şartıyla $e \in G$ (sol birim) ve

B) G de alınan herhangi bir a elemanı için $a' * a = e$ olmak şartıyla bir $a' \in G$ (a nın sol tersi) bulunabilsin.

Bu takdirde kapalılık, birleşme, A), B) koşulları grup aksiyomlarına denktirler.

İspat. $*$ işleminin G üzerinde kapalılık ve birleşme aksiyomlarını sağladığını kabul edelim. Ayrıca A) ve B) özellikleri varsa $(G,*)$ nın bir grup olacağını gösterelim :

$$a' * a = e \Rightarrow (a' * a) * a' = e * a' = a' \Rightarrow a' * (a * a') = a' \quad \text{olur. Şu halde}$$

$(a')' \in G$ elemanı a' elemanının sol tersi olmak üzere

$$a' * (a * a') = a' \Rightarrow [(a')' * a'] * [a * a'] = (a')' * a' = e \Rightarrow a * a' = e$$

elde ederiz. Böylece $a' = a^{-1}$ dir.

Şimdi sol birimin, G de $*$ işlemine göre birim olduğunu yani, $\forall\, a \in G$ için $e * a = a * e = a$ eşitliğini gösterelim :

B) den $\forall\, a \in G$ için $a' * a = e$ olacak şekilde $a' \in G$ vardır. Böylece $a * e = a * (a' * a) = (a * a') * a = e * a$ elde ederiz.

Tersine, $(G, *)$ bir grup ise A) ve B) özellikleri sağlanır.

Not 1.11.

$(G,*)$ grubunda $*$ işlemi yerine genellikle " toplama" $(+)$ veya "çapma" $(\,.\,)$ işaretleri kullanılır.

İşlem $(+)$ ise, gruba toplamsal grup denir. Bu durumda $a * b$ yerine, $a + b$ yazılır. Toplamsal grubun etkisiz elemanı 0_G ile ve bir $a \in G$ elemanının tersi $-a$ ile gösterilir.

İşlem $(\,.\,)$ ise, gruba çarpımsal grup denir. Bu durumda $a * b$ yerine $a.b$ veya ab yazılır. Çarpımsal grubun etkisiz elemanı 1_G veya e_G (veya sadece e) ile gösterilir. Bir $a \in G$ nin tersi a^{-1} ile gösterilir.

Şimdi çarpımsal bir grupta bir elemanın kuvvetini tanımlayalım.

Tanım 1.12. G bir çarpımsal grup ve $a \in G$ olsun. $n \in Z$ için

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{a.a.a \ldots a}_{n\, defa} & ; \; n > 0 \; ise \\ 1_G = e_G & ; \; n = 0 \\ \underbrace{a^{-1}.a^{-1}.a^{-1} \ldots a^{-1}}_{-n\, defa} & ; \; n < 0 \; ise \end{cases}$$

ile tanımlanır.

Önerme 1.13. G bir çarpımsal grup ve $a, b \in G$ olsun. $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için,

i) $a^m.a^n = a^{m+n}$
ii) $(a^m)^n = a^{mn}$
iii) G değişmeli bir grup ise $(ab)^n = a^n b^n$

İspat:
i) $a^m a^n = a^{m+n}$ olduğunu, n üzerinden tümevarım uygulayarak ispatlayalım. $n = 1$ için $a^m a = a^{m+1}$ olduğu tanımdan kolayca görülür. n için doğru kabul edip $n + 1$ için eşitliği ispatlayalım:

$$a^m a^{n+1} = a^m(a^n a) = (a^m a^n)a = a^{m+n}a = a^{m+n+1}$$

ii) $n = 1$ için $(a^m)^1 = a^m = a^{m.1}$ olur. Eşitliğin n için doğru olduğunu kabul edip $n + 1$ için eşitliği ispatlayalım :

$$(a^m)^{n+1} = (a^m)^n.a^m = a^{mn}.a^m = a^{mn+m} = a^{m(n+1)}$$

iii) İspatı n üzerinden tümevarımla yapalım. $n = 2$ için birleşme ve değişme özelliğinden

$$(ab)^2 = (ab)(ab) = a(ba)b = a(ab)b = (aa)(bb) = a^2b^2$$

elde ederiz. Şimdi $n = k$ için eşitliğin doğru olduğunu kabul edelim. Yani,

$$(ab)^k = a^k b^k$$

olsun. Son eşitlin her iki yanını ab ile çarparsak

$$(ab)(ab)^k = (ab)^{k+1} = (ab)\left(a^k b^k\right)$$

elde ederiz. Birleşme ve değişme özelliğini kullanarak,

$$(ab)^{k+1} = a(ba^k)b^k = a(a^k b)b^k = (aa^k)(bb^k) = a^{k+1}b^{k+1}$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece ispatı tamamlamış oluruz.

Not 1.14. $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için $(a^m)^{-1}$=$(a^{-1})^m = a^{-m}$ olduğundan Önerme 1.13, $\forall\, m, n \in Z$ için doğrudur.

Tanım 1.15. $(G,+)$ bir grup ve $a, b \in G$ olsun. $n \in Z$ için

$$na = \begin{cases} \underbrace{a + a \ldots + a}_{n\, defa} & ;\ n > 0\ ise \\ 0_G & ;\ n = 0 \\ \underbrace{(-a) + (-a) \ldots \ldots .+(-a)}_{-n\, defa} & ;\ n < 0\ ise \end{cases}$$

ile tanımlanır.

Önerme 1.16. $(G,+)$ bir grup ve $a, b \in G$ olsun. $\forall m, n \in Z$ için

i) $ma + na = (m+n)a$

ii) $m(na) = (mn)a$

iii) $n(a+b) = na + nb$

İspat. Önerme 1.13 deki ispat teknikleriyle yapabiliriz.

Şimdi Analiz derslerinden aşina olduğumuz birkaç grup örneğiyle bu bölümü bitirelim.

Örnekler 1.17.

1) $C = \{(a_n)_{n=1}^{\infty} : \lim\limits_{n\to\infty} a_n\ var\}$ tüm yakınsak reel sayı dizilerinin kümesini göz önüne alalım. C kümesinin bir toplamsal grup olduğunu gösterelim:

i) $(a_n), (b_n) \in C$ alalım. O halde $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{R}$ vardır. Böylece $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a + b$ yani $(a_n) + (b_n) \in C$ olur. O halde C toplama işlemi altında kapalıdır.

ii) Her $(a_n), (b_n), (c_n) \in C$ için $((a_n) + (b_n)) + (c_n) = (a_n) + ((b_n) + (c_n))$ olduğu açıktır (Birleşme özelliği).

iii) Sıfır dizisi yakınsak olup C nin birim elemanıdır, çünkü her $(a_n) \in C$ için $(a_n) + (0) = (a_n)$ olur.

iv) $(a_n) \in C$ alalım. O halde $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{R}$ vardır. Böylece $\lim\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -a$ yani $(-a_n) \in C$ olur. Ayrıca $(-a_n)$ in (a_n) dizisinin toplamsal tersi olduğu açıktır.

2) $[-1,1]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli reel değerli tüm fonksiyonların kümesini $C[-1,1]$ ile gösterelim, yani $C[-1,1] = \{ f: [-1,1] \to \mathbb{R}: f\ s\ddot{u}rekli \}$. Bu durumda $(C[-1,1], +)$ bir gruptur:

- **i)** $[-1,1]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli iki fonksiyonun toplamı da süreklidir (Kapalılık özelliği).
- **ii)** Her $f, g, h \in C[-1,1]$ için $f + (g + h) = (f + g) + h$ olduğu açıktır.
- **iii)** Sıfır fonksiyonu (Her $x \in [-1,1]$ için $0(x) = 0$ fonksiyonu) $[-1,1]$ aralığı üzerinde sürekli olup $C[-1,1]$ in birim elemanıdır, çünkü her $f \in C[-1,1]$ için $f(x) + 0(x) = f(x)$ olur.
- **iv)** $f \in C[-1,1]$ alalım. f sürekli olduğundan $-f$ de sürekli olup f in toplamsal tersidir.

Sorular

1) G bir grup olmak üzere aşağıdaki eşitlikleri gösteriniz.

(a) $e \in G$ birim eleman olmak üzere $e^{-1} = e$.

(b) $a \in G$ olmak üzere $(a^{-1})^{-1} = a$.

(c) $\forall\, a_1, a_2, \dots, a_n \in G$ için $(a_1 a_2 \dots a_n)^{-1} = a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \dots a_1^{-1}$.

2) Aşağıdaki kümelerin verilen işlem altında bir grup olup olmadığını belirleyiniz.

(a) Z tamsayılar kümesi ve $G = \{2n: n \in Z\}$ olmak üzere $(G, +)$,

(b) $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve $a.b = a + b + 1$ olmak üzere $(\mathbb{R}, .)$,

(c) $\mathbb{R}^+$ pozitif reel sayılar kümesi $a * b = \sqrt{ab}$ olmak üzere $(\mathbb{R}^+, *)$.

3) $\mathbb{R}$ reel sayılar olmak üzere $\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n): a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$ olmak üzere

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \dots, \mathrm{b}_\mathrm{n}) = (a_1 + \mathrm{b}_1, a_2 + \mathrm{b}_2, \dots, a_n + \mathrm{b}_\mathrm{n})$$

işlemi altında $(\mathbb{R}^n, +)$ nın bir grup olduğunu gösteriniz.

4) $S = \mathbb{R} - \{-1\}$ ve $a * b = a + b + ab$ olmak üzere $(S,*)$ nin bir grup olup olmadığını inceleyiniz.

5) $G = \left\{a + b\sqrt{-5} \;:\; a, b \in \mathbb{Q},\ a \neq 0 \text{ veya } b \neq 0\right\}$ kümesi kompleks sayılardaki çarpma işlemine göre bir gruptur. Gösteriniz.

6) $\mathbb{R}$ reel sayılar olmak üzere $(a, b) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olsun. $(x, y) \to (x + a, y + b)$ ile $T_{a,b}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dönüşümünü tanımlayalım. $T(\mathbb{R}^2) = \left\{T_{a,b}: a, b \in \mathbb{R}\right\}$ kümesinin bileşke işlemi altında bir grup olduğunu gösteriniz.

7) $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $a * b = \frac{ab}{2}$ olmak üzere $(\mathbb{Q} - \{0\},*)$ bir grup mudur ?

8) Aşağıdaki kümelerin verilen işlem altında bir grup olup olmadığını belirleyiniz.

(a) Matrislerde toplama işlemine göre $n \times n$ lik reel matrislerin kümesi

(b) Matrislerde çarpma işlemine göre $n \times n$ lik reel matrislerin kümesi

(c) Matrislerde çarpma işlemine göre $n \times n$ lik reel değerli köşegen matrislerin kümesi

9) $SL(2,\mathbb{R}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1\}$ kümesinin matris çarpımına göre bir grup oluşturduğunu gösteriniz.

10) $G = \{\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in Z\}$ kümesinin matris çarpımına göre bir grup oluşturduğunu gösteriniz. Ayrıca G deki birimden farklı her elemanın mertebesinin sonsuz olduğunu görünüz.

11) $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ grubunda $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ elemanının varsa tersini bulunuz.

12) $G = \{(a,b,3):\ a,b \in Z\}$ kümesinin $(a,b,3) * (c,d,3) = (a+c, b+d, 3)$ ikili işlemi ile birlikte bir değişmeli grup olduğunu gösteriniz.

13) $\mathrm{G} = Z \times Z = \{(a,b): a,b \in Z\}$ kümesinin $(a,b) * (c,d) = (a+c, (-1)^c b + d)$ şeklinde tanımlanan * işleme göre bir grup olup olmadığını inceleyiniz.

14) X boş olmayan bir küme $P(X)$, X in tüm alt kümelerinin ailesi (kuvvet kümesi) olmak üzere aşağıda verilen ikili işlemlere göre $P(X)$ in bir grup olup olmadığını belirleyiniz. Değil ise neden olmadığını bir örnek ile açıklayınız. $A, B \in P(X)$ olsun.

(a) $A * B = A \cup B$

(b) $A \circ B = A \cap B$

(c) $A \Delta B = (A * B) - (A \circ B)$

15) $(G,*)$ bir grup ve $a,b \in G$ olsun. $a * b = b * a^{-1}$ ve $b * a = a * b^{-1}$ ise $a^4 = b^4 = e$ olduğunu gösteriniz.

16) G bir grup olmak üzere $\forall\, a \in G$ için $a^2 = e$ ise, G grubunun değişmeli olduğunu gösteriniz.

17) Bir G grubunda $(ab)^2 = a^2 b^2$ ise $ab = ba$ olduğunu gösteriniz.

18) $(G,*)$ bir grup ve $a,b \in G$ olsun. $(a * b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$ olması için gerek ve yeter koşul $a * b = b * a$ olmasıdır, gösteriniz.

19) Eleman sayısı çift olan bir grupta, tersi kendisine eşit olan birimden farklı bir eleman var olduğunu ispatlayınız.

20) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ olmak üzere $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +)$ ve $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}) - \{0\}, \,.)$ nin değişmeli grup olduğunu gösteriniz.

21) $(G,*)$ bir grup ve $a, b \in G$ olsun. Şu halde, $a * x = b$ ve $y * a = b$ denklemlerinin G içinde bir tek çözümü olduğunu ispatlayınız.

22) $n \geq 1$ olmak üzere $\left\{\cos\frac{k.360}{n} + i\sin\frac{k.360}{n} : k = 0,1,2,\ldots,n-1\right\}$
($x^n - 1$ in kompleks kökleri) kümesinin çarpım altında bir grup olduğunu gösteriniz.

23) Tam 1000 elemanlı abel grubu örneği veriniz.

24) Aşağıdaki ifadeler doğru/ yanlış mıdır? Doğru ise ispatlayınız, yanlış ise nedenini bir örnekle açıklayınız.

(a) Bir grupta birden fazla birim eleman bulunabilir.
(b) G sonlu bir grup, $a \in G$ olsun. $a^n = e$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.
(c) $(G,*)$ grup ise $a * x * b = c$ denklemi G de tek türlü çözüme sahiptir.
(d) $(G,*)$ bir grup ve $a, b, c \in G$ olsun. $a * b * c = e$ ise $b * c * a = e$ dir.
(e) $(G,*)$ bir grup ve $a, b \in G$ olsun. $(a * b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$ dir.
(f) G grubu iki elemanlı ise Abel grubudur.
(g) $(G,*)$ bir grup ve $a, b \in G$ olsun. $(a * b)^2 = a^2 * b^2$ dir.
(h) Bir grupta her lineer denklemin çözümü vardır.

KAYNAKLAR

[1] D.S.Malik, John.N.Mordeson, M.K.Sen, Abstract algebra, Mc Graw –Hill International Editions,1997.
[2] Fethi Çallıalp, Örneklerle Soyut Cebir, Birsen Yayınevi, 2011.
[3] Göksel Ağargün, Erol Balkanay, Nilgün Aygör, Soyut Cebir, 2000.
[4] Joseph A.Gallian, Contemporary Abstract Algebra,1992.
[5] John B. Fraleigh, A First Course in Abstract Algebra.
[6] Thomas W. Hungerford, Algebra,Springer.